ESERCIZI SVOLTI SUL LAVORO DI TRASFORMAZIONI ISOTERME

a.a. 2019/2020

Per gli Allievi dei corsi di laurea L-17 Scienze dell'Architettura e LM-4 Architettura c.u.

Prof. Ing. Marina Mistretta

Esercizio 1

Due moli di un gas perfetto monoatomico compiono un'espansione isoterma (temperatura = 200 K) passando da un volume iniziale di 2 litri ad un volume finale di 6 litri.

Calcolare il lavoro compiuto.

- numero di moli $n = 2$
- l'espansione isoterma avviene alla temperatura di 200 K
- volume iniziale $V_i = 2$ litri
- volume finale $V_f = 6$ litri

la costante universale dei gas ideali $R = 8{,}314$ J/mole K

Il lavoro in una trasformazione isoterma, cioè senza variazione di temperatura, è dato da:

$$\mathrm{L} = \int_{\mathrm{V_i}}^{\mathrm{V_f}} \mathrm{p\,dV} = \int_{\mathrm{V_i}}^{\mathrm{V_f}} \frac{\mathrm{nRT}}{\mathrm{V}} \mathrm{dV} = \mathrm{nRT} \int_{\mathrm{V_i}}^{\mathrm{V_f}} \frac{1}{\mathrm{V}} \mathrm{dV} = \mathrm{nRT} \ln \frac{\mathrm{V_f}}{\mathrm{V_i}}$$

$$L = nRT \ln \frac{V_f}{V_i} = 2 \times 8,314 \times 200 \times \ln \frac{6 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} = 3653,5\ J$$

Esercizio 2

Un cilindro di base circolare con diametro 10 cm contiene 0,5 moli di gas ideale alla temperatura di 50 °C. La posizione iniziale del pistone corrisponde ad un'altezza rispetto al fondo del cilindro di 30 cm. Il sistema si espande compiendo un lavoro di 890 J, mentre la pressione all'interno del cilindro rimane costante.

Calcolare la nuova posizione del pistone, riferita sempre al fondo, e la temperatura finale del gas.

- temperatura iniziale del gas $T_{iniziale} = 50\ °C = 323\ K$
- posizione iniziale del pistone rispetto alla base del cilindro $h_i = 30$ cm
- lavoro prodotto per compiere l'espansione = 890 J
- trasformazione isobara
- raggio di base del cilindro r = 0,05 m
- volume del cilindro $V = \rho r^2 h$
- numero di moli contenute nel cilindro n = 0,5

Partendo dall'equazione di stato per i gas ideali pV=nRT è possibile risalire al valore iniziale della pressione del gas, questo valore è funzione del volume iniziale del gas ricavato da:

$$\mathrm{V} = \pi \times \mathrm{r}^2 \times \mathrm{h}_{\mathrm{iniziale}} = 3{,}14 \times (0{,}05)^2 \times 0{,}3 = 0{,}002355\ \mathrm{m}^3$$

La pressione sarà, quindi, data da:

$$p = \frac{nRT}{V} = \frac{0,5 \times 8,314 \times 323}{0,002355} = 570153\left[Pa\right]$$

$$\left[\frac{mole \dfrac{J}{mole\ K} K}{m^3} = \frac{J}{m^3} = \frac{Nm}{m^3} = \frac{N}{m^2}\right]$$

Dalla definizione di lavoro L = pΔV è possibile ricavare la variazione di volume ΔV, e conseguentemente il valore del volume alla fine del processo:

$$\Delta\mathrm{V} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{p}} = \frac{890[\mathrm{J}]}{570187{,}6[\mathrm{Pa}]} = 0{,}00156\left[\mathrm{m}^3\right] = \mathrm{A} \times \Delta\mathrm{h} = 0{,}00785 \times (\mathrm{h}_{\mathrm{finale}} - 0{,}3)$$

$$\mathrm{h}_{\mathrm{finale}} = 0{,}5\ \mathrm{m}$$

Per determinare il valore della temperatura alla fine del processo si usa l'equazione di stato dei gas perfetti in funzione del valore del volume finale:

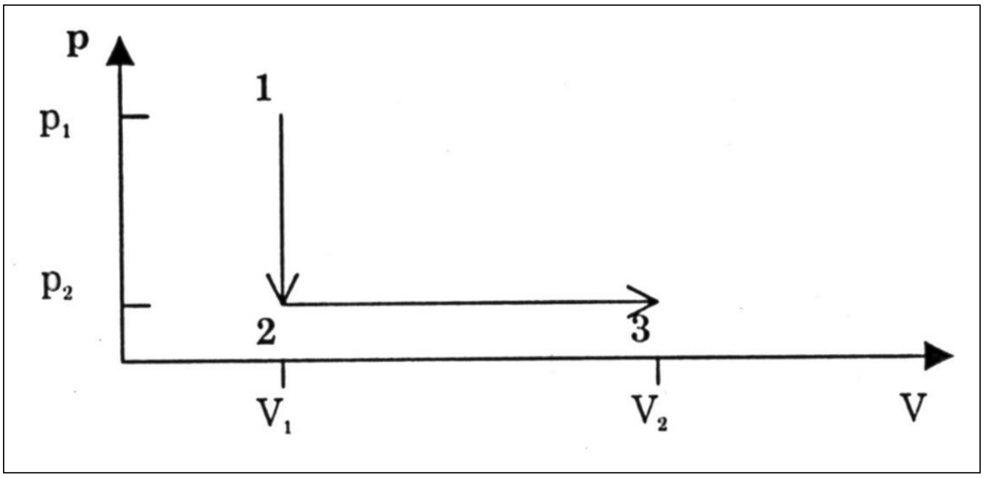
$$T_{finale} = \frac{pV_{finale}}{nR} = \frac{570187{,}5 \times \left(3{,}14 \times 0{,}05^2 \times 0{,}5\right)}{0{,}5 \times 8{,}3145} = 538\ \mathrm{K}$$

Esercizio 3

Una mole, di gas perfetto si trova alla condizioni iniziali di pressione pari a $p_i = 3$ atm, volume $V_i = 1$ l ed energia interna $U_i = 456$ J.
Il suo stato finale è $p_f = 2$ atm, volume $V_f = 3$ l ed energia interna Ue= 912 J

Si analizzino quattro diverse successioni di trasformazioni e si calcolino il lavoro L compiuto dal gas ed il calore Q somministrato durante ciascun processo

1 mole di gas perfetto: $n = 1$
Pressione iniziale $p_i = 3$ atm
Volume iniziale $V_i = 1\ l = 0{,}001\ m^3$
Energia interna allo stato iniziale $U_i = 456$ J
Pressione finale $p_f = 2$ atm
Volume finale $V_f = 3\ l = 0{,}003\ m^3$
Energia interna allo stato finale $U_f = 912$ J
1 atm = 101325 Pa



Successione 1
II gas è prima raffreddato a volume costante finché la sua pressione non è 2 atm. È poi lasciato espandere a pressione costante finché il suo volume non è 3 l.

Durante la fase di raffreddamento del gas a pressione costante il lavoro

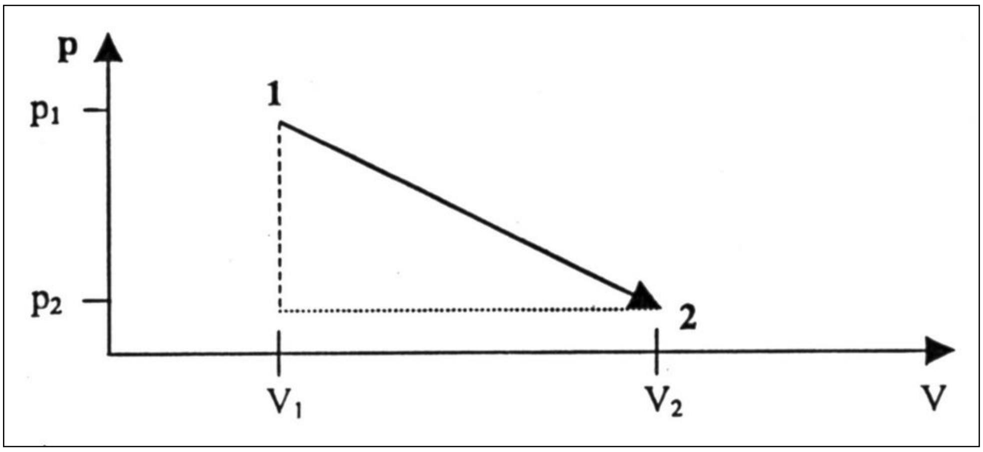
$L_{1,2} = 0$ poiché $L_{1,2} = p_1\Delta V$ con $\Delta V = 0$

Durante la fase di espansione $L_{2,3} = p_2(V_2 - V_1)$

$L_{2,3} = (2 \text{ x } 101325)\text{x}(0{,}003 - 0{,}001) = 405 \text{ J}$

Dal primo principio della termodinamica $\Delta U = Q - L$

$$\Delta U = 912 - 456 = 456\ J \qquad Q = 456 + 405 = 861\ J$$

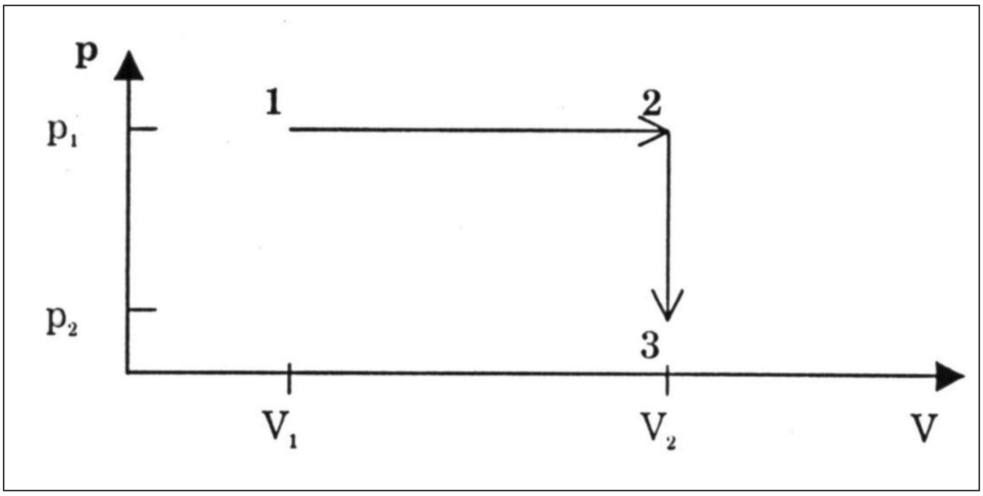


Successione 2
II gas si espande e gli è somministrato calore in modo tale che, su un diagramma pV, segua un cammino rettilineo dal suo stato iniziale al suo stato finale.

Il gas segue un cammino rettilineo per passare dallo stato iniziale 1 allo stato finale 2. Il lavoro L compiuto dal gas è dato dall'area racchiusa dal trapezio $(1\text{-}V_1\text{-}V_2\text{-}2)$:

$$L = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)\times(V_2 - V_1) = \frac{1}{2}(303975 + 202650)\times(0{,}003 - 0{,}001) \cong 507J$$

$$Q = \Delta U + L = 456 + 507 = 962\, J$$

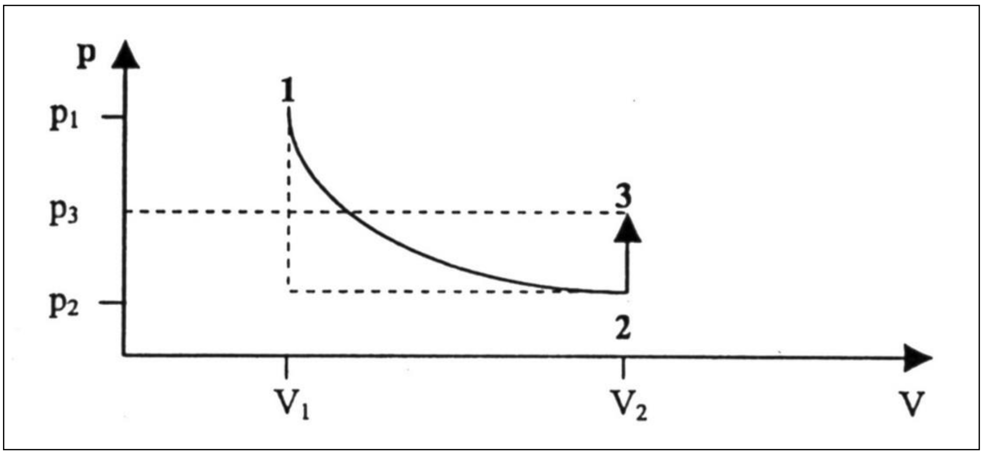


Successione 3
Il gas è lasciato espandere, a pressione costante fino a un volume di 3 l. È poi raffreddato a volume costante finché la sua pressione non sia 2 atm.

Il lavoro durante il processo di raffreddamento a volume costante ($L_{2,3}$) è pari a zero, e quindi:

$$L = L_{1,2} = p_1(V_2 - V_1) = 303975 \times (0{,}003 - 0{,}001) = 607J$$

$$Q = \Delta U + L = 456 + 607 = 1063J$$



Successione 4
II gas è lasciato espandere isotermicamente finché il volume non è 3 l e la sua pressione 1 atm. È poi riscaldato a volume costante finché la sua pressione non è 2 atm.

Durante l'espansione isoterma $L_{1,2} = \int_{V_1}^{V_2} pdV = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$

$$T = \frac{p_2 V_2}{nR} = \frac{p_1 V_1}{nR} = \frac{(3 \times 101325) \times 0{,}001}{1 \times 8{,}31} = 36{,}6K$$

$$L_{1,2} = 1 \times 8{,}314 \times 36{,}6 \times \ln \frac{0{,}003}{0{,}001} \cong 333 [J]$$

$$Q = \Delta U + L = 456 + 333 = 789 J$$