MASSIMIZZAZIONE VINCOLATA. IL MOLTIPLICATORE DI LAGRANGE. VINCOLI DI ~~UGUAGLIANZA~~ UGUAGLIANZA.

Per comprendere a pieno il problema che ci accingiamo ad analizzare introduciamo dapprima il caso di funzioni a due variabili.

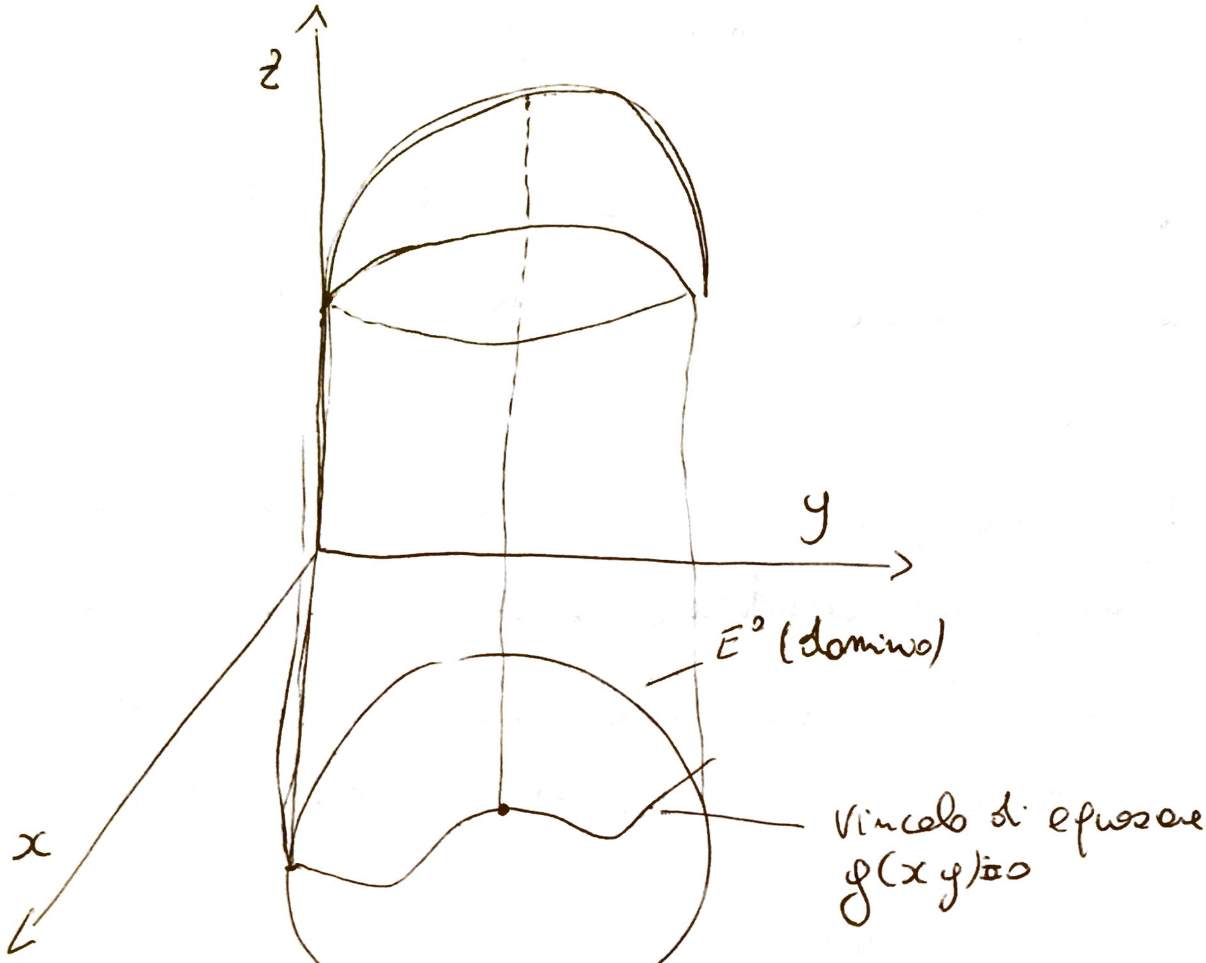
Sia $z = f(x, y)$ una funzione definita in un insieme aperto E^o del piano, continua e di classe C^1 (cioè differenziabile 1 volta) quindi con derivate parziali prime continue. Sia A un sottoinsieme di E^o così definito:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$$

essendo $g(x, y)$ anch'essa una funzione definita in E^o continua di classe C^1 con derivate parziali prime continue.

Il problema della ricerca di estremi vincolati anziché liberi è dovuto al fatto che in questo caso la ricerca di tali estremi non deve più avvenire in tutto il dominio di definizione della funzione ~~[illegible]~~ $E^o \in \mathbb{R}^2$ bensì in una particolare restrizione di tale dominio. (La restrizione è rappresentata analiticamente dalla funzione vincolo $g(x, y) = 0$ anche definita in E^o.

Si veda grafico ⟶



La situazione migliore che ci possa capitare è quella in cui dall'equazione del vincolo $g(x\,y)=0$ si possa esplicitare una variabile in funzione dell'altra e cioè $y = y(x)$ o $x = x(y)$, in questo caso infatti la nostra funzione obiettivo $z = f(x\,y)$ soggetta alla condizione del vincolo $g(x\,y)=0$ potendo esplicitare quest'ultimo e sostituendolo nella funzione obiettivo si trasforma nella funzione $z = f(x; y(x))$ oppure $z = f(x(y); y)$ vale a dire che siamo passati da una funzione di due variabili ad una funzione ad una variabile. Abbiamo trasformato dunque un problema di ricerca di estremi vincolati per una funzione di due variabili nella ricerca di estremi ~~[illegible]~~

liberi per una funzione di una variabile.

Esempio:

Si consideri la funzione $f(x,y) = x - y^2$ (funzione obiettivo) definita in $\mathbb{R}^2$ e l'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y^2 - 2 = 0\}$ dove $x + y^2 - 2 = 0$ rappresenta l'equazione del vincolo $g(x,y) = 0$. Abbiamo visto che al fine di determinare il massimo ed il minimo valore che la funzione assume nei punti di A e quindi di conseguenza i punti di A ove tali valori sono raggiunti, proviamo ad esplicitare nell'equazione del vincolo una variabile in funzione dell'altra. Così nell'esempio testé proposto avremo:

$x = 2 - y^2$ e così la funzione $f(x,y)$ si può ridurre alla funzione $\varphi(y) = f(2-y^2, y)$ che è in una sola variabile. Quindi come visto abbiamo ricondotto il problema di massimizzazione di una funzione a 2 variabili ad un problema ad una sola variabile.

Purtroppo però nei problemi concreti non è sempre possibile esplicitare una funzione, quindi non sarà sempre possibile ridurre ad una dimensione il nostro problema. Ecco perché si introduce il concetto di Moltiplicatore di Lagrange.

IMPOSTAZIONE GENERALE E RIGOROSA DEL PROBLEMA

Sia $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ una funzione definita in un insieme aperto E° di $\mathbb{R}^n$ continua con le derivate parziali prime continue, e sia A un sottoinsieme di E° del tipo:

$$A = \{(x_1 \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n : f_1(x_1 \ldots x_n) = 0 \ldots, f_m(x_1 \ldots x_n) = 0\}$$

dove $f_1, \ldots f_m$ con $(m < n)$ sono anch'esse funzioni definite in E° continue con derivate parziali prime continue. Il problema consiste nel determinare un punto $P_0 \in A$ tale che risulti:

$$\overset{①}{f(P_0) \geq f(P)} \quad \text{oppure} \quad \overset{②}{f(P_0) \leq f(P)} \quad \forall P \in A$$

Nel caso ① avremo un punto di max relativo* nel secondo caso ② avremo un min. relativo* $\quad$ * = vincolato

Si consideri la funzione detta Lagrangiana:

$$f(x_1 \ldots x_n) - \lambda_1 f_1(x_1 \ldots x_n) - \ldots - \lambda_m f_m(x_1 \ldots x_n)$$

ove $\lambda_1 \ldots \lambda_m$ sono delle costanti note come moltiplicatori di Lagrange.

<u>Teorema</u>: Considerando le ipotesi poste, se P_0 è un punto di massimo o di minimo relativo per la funzione f considerata su A, allora esistono m costanti $\lambda_1 \ldots \lambda_m$ tali che P_0 risulta un punto critico o stazionario per la funzione Lagrangiana.

Per determinare i punti di massimo e di minimo della funzione f relativamente ai valori che essa assume in A occorre allora seguire il seguente iter:

1) Si calcolano le derivate parziali prime della funzione Lagrangiana calcolate rispetto a x, y e λ e si pongono uguali a 0 (condizione del primo ordine). Il risultato si inserisce in un sistema il quale risolto ci darà le costanti cercate $\lambda_1 \dots \lambda_m$ e i punti critici.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} - \dots - \lambda_m \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} - \lambda_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} - \dots - \lambda_m \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n} = 0 \\ g_1(x_1 \dots x_n) = 0 \\ g_m(x_1 \dots x_n) = 0 \end{cases}$$

2) Una volta risolto il sistema testé presentato bisognerà stabilire quali dei punti critici trovati sono anche punti di massimo e minimo per la restrizione di f su A.

Studiamo a questo punto fase per fase l'iter di calcolo e di determinazione di un punto di massimo o di minimo vincolato. Data una funzione $f(xy)$ con le caratteristiche analitiche finite in precedenza, detta funzione obiettivo, soggetta ad un vincolo $g(xy)$ si può formare una nuova funzione uguagliando il vincolo a zero, moltiplicandolo per λ (il moltiplicatore di Lagrange) e sottraendo (nei problemi di massimo) e sommando (nei problemi di minimo) il prodotto alla funzione originaria. Pertanto la funzione Lagrangiana si ottiene dalla funzione obiettivo e dalla funzione vincolo

$$L(x;y;\lambda) = f(xy) - + g(xy)$$

nei problemi di max — nei problemi di min

Quindi per massimizzare $f(xy)$ in una situazione di vincolo avremo

$$L(x,y,\lambda) = f(xy) - \lambda(g(xy)) \qquad (1)$$

per minimizzare $f(xy)$ sempre soggetta ad un vincolo:

$$L(xy\lambda) = f(xy) + \lambda(g(xy))$$

Esempio generale.

Si ottimizzi la funzione $z = 4x^2 + 3xy + 6y^2$ soggetta al vincolo $x + y = 56$

① Per andare alla ricerca dei punti critici vincolati uguagliamo per prima cosa il vincolo uguale a zero

$$x + y - 56 = 0$$

Questa è la nostra funzione vincolo $g(xy) = 0$ che bisogna moltiplicare per λ e sommare alla funzione obiettivo per ottenere la funzione Lagrangiana. Indicando dunque con L la funzione Lagrangiana si avrà:

$$L(x\,y\,\lambda) = 4x^2 + 3xy + 6y^2 + \lambda(x + y - 56)$$

② Calcoliamo le derivate parziali del primo ordine ponendole uguali a zero e costruiamo il sistema: avremo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 8x + 3y + \lambda \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 3x + 12y + \lambda \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 56 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 8x + 3y + \lambda = 0 \\ 3x + 12y + \lambda = 0 \\ x + y - 56 = 0 \end{cases}$$

③ Risolvendo questo sistema lineare nelle incognite x, y, λ otteniamo

$$x = 36 \quad y = 20 \quad \lambda = -348$$

la funzione dunque sarà ottimizzata da questi valori:

$$L = 4(36)^2 + 3(36)(20) + 6(20)^2 + (-348)(36+20-56) =$$

$$= 9744$$

NB = Si noti che poiché il vincolo è sempre uguagliato a zero l'addizione del termine $\lambda g(x,y)$ non modifica il valore della funzione obiettivo.

Osservazione importante:

Con i risultati ai quali siamo pervenuti, a questo punto siamo in grado di stabilire solo quali sono i punti critici (cioè x, y) di una funzione sottoposta a condizione di vincolo ma non ci possono ancora esprimere sulla natura di tali punti, vale a dire se sono massimi o minimi. Vedremo a breve come accorgerci di questo.

SIGNIFICATO ECONOMICO DEL MOLTIPLICATORE DI LAGRANGE

Il moltiplicatore di Lagrange λ approssima l'effetto che sulla funzione obiettivo ha la variazione di una unità della costante della funzione vincolo. Se λ è positivo >0 per ogni unità di incremento (o decremento) della costante della funzione vincolo, la funzione obiettivo diminuirà (o aumenterà) di un valore approssimativamente uguale al valore λ. Se, al contrario, λ è negativo per ogni incremento (decremento) della costante della funzione vincolo, la funzione obiettivo aumenterà (diminuirà) di un valore approssimativamente uguale al valore di λ.
Possiamo dunque dire che il moltiplicatore di Lagrange fornisce una misura della "sensibilità" del valore ottimale di f rispetto a variazioni della costante in questione.

Esempio:

Si riprende l'esempio fatto in precedenza e facciamo vedere come essendo in tale caso λ negativo <0, un incremento di una unità della costante della funzione vincolo determinerà un incremento della funzione obiettivo approssimativamente uguale a 348.

Riprendiamo la funzione obiettivo dell'esempio precedente

$$Z = 4x^2 + 3xy + 6y^2$$

ed ottimizziamola considerando un nuovo livello vincolato del vincolo della funzione precedente, ottenuto incrementando di una sola unità il valore del termine costante. Il vincolo sarà sempre:

$$x + y - 57 = 0$$

La Lagrangiana sarà:

$$L = 4x^2 + 3xy + 6y^2 + \lambda(x + y - 57)$$

da cui procedendo alla costruzione del sistema avremo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 8x + 3y + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 3x + 12y + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 57 = 0 \end{cases}$$

risolvendo avremo $x = 36{,}64$ $y = 20{,}36$ $\lambda = -354{,}2$.

Sostituendo questi valori nella funzione di Lagrange si ottiene il nuovo ottimo vincolato di $Z = 10095$. È di 351 unità maggiore del precedente ottimo vincolato (9744).

FISSAZIONE DELLE CONDIZIONI DEL SECONDO ORDINE (O SUFFICIENTI) NELL'OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA – IL DETERMINANTE HESSIANO (ORLATO)

Sino a questo punto si e' visto che per ottimizzare una funzione $z = f(xy)$ soggetta ad un vincolo $g(xy) = 0$ si può formare una nuova funzione (la Lagrangiana) di espressione:

$$\mathcal{L}(x\,y\,\lambda) = f(xy) - \lambda\, g(xy)$$

dove le condizioni del primo ordine (o necessarie) sono $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0$ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$ ossia le ~~derivate~~ derivate parziali prime devono essere uguali a zero – Possiamo altresì e fissare in modo rigoroso le condizioni del secondo ordine (o sufficienti) che ci permettono di stabilire una volta ottimizzata la funzione obiettivo se e' ~~massimizzata~~ massimizzata o minimizzata – A questo scopo introduciamo il seguente determinante che prende il nome di Hessiano Orlato (che può essere espresso in due modi):

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{xx} & \mathcal{L}_{xy} & g_x \\ \mathcal{L}_{yx} & \mathcal{L}_{yy} & g_y \\ g_x & g_y & 0 \end{vmatrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & \mathcal{L}_{xx} & \mathcal{L}_{xy} \\ g_y & \mathcal{L}_{yx} & \mathcal{L}_{yy} \end{vmatrix}$$

che e' semplicemente il determinante Hessiano $\begin{vmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix}$ orlato con le derivate prime del vincolo, con zero sulla diagonale principale. L'ordine di un minore principale orlato e' determinato dall'ordine del minore principale che viene orlato. Quindi il determinante $|\bar{H}|$ in questione rappresenta un minore principale orlato secondo $|\bar{H}_2|$ poiche' il minore principale che viene orlato e' di ordine (2×2). Nel caso di una funzione di n variabili $f(x_1, x_2 \dots x_n)$ soggetta a $g(x_1 \dots x_n)$ vincoli si ha:

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} & g_1 \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2n} & g_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} & g_n \\ g_1 & g_2 & \dots & g_n & 0 \end{vmatrix}$$

dove $|\bar{H}| = |\bar{H}_n|$ dato che viene orlato il minore principale di ordine $(n\times n)$.

IMPORTANTE:

Se $|\bar{H}_2|, |\bar{H}_3|, \dots |\bar{H}_n|$ sono < 0 il determinante Hessiano orlato e' definito positivo, il che costituisce una condizione di minimo sufficiente.

Se $|\bar{H}_2| > 0$, $|\bar{H}_3| < 0$, $|\bar{H}_4| > 0$ cioe' i segni sono discorsi in modo alternato l'Hessiano orlato e' definito negativo, il che costituisce una condizione sufficiente di massimo.

Osservazione importante:

Le condizioni testè esposte sono solo sufficienti affinche' si possa parlare di max o min vincolato. Ma per gli obiettivi del seguente scritto non occorre conoscere gli altri aspetti del problema per ovvi motivi di difficolta'.