



Università degli Studi  
**Mediterranea**  
di Reggio Calabria

DiGiES Dipartimento di  
**GIURISPRUDENZA  
ECONOMIA e SCIENZE UMANE**



# La Teoria dei Fuzzy Sets

---

***BUSINESS ANALYTICS AND DECISIONS THEORY***

***Prof. MASSIMILIANO FERRARA***

*(A cura della D.ssa Merenda Domenica Stefania)*

# CONCETTO DI INSIEME

---

Secondo la *logica classica*, un **insieme** è definito come:

*Qualunque aggregato (o collezione) di oggetti per il quale sia sempre possibile decidere se un generico oggetto appartiene oppure no all'aggregato stesso.*

Il punto centrale della teoria degli insiemi è la nozione di **appartenenza ad un insieme**.

# TEORIA CLASSICA DEGLI INSIEMI

---

Sia  $X$  l'Universo del discorso e i suoi elementi sono definiti  $x$ : nella *teoria classica degli insiemi*, l'insieme  $A$  su  $X$  è definito tramite la funzione  $F_A(x)$  chiamata **funzione caratteristica** di  $A$ .

$$F_A(x): X \rightarrow \{0,1\} \text{ dove } F_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in A \\ 0, & \text{if } x \notin A \end{cases}$$

Questo insieme mappa l'Universo del discorso  $X$  ad un insieme di due elementi (questo insieme è definito “**Crisp**”).

# TEORIA CLASSICA DEGLI INSIEMI

---

Il concetto di *appartenenza* ad un insieme si riferisce unicamente alla condizione VERO-FALSO.

La **funzione di appartenenza** di un insieme è una funzione booleana che può assumere solo due valori:

- 1= appartenenza
- 0= non appartenenza

Esempio: insieme di persone con altezza maggiore di 180 cm.

- Giovanni appartiene all'insieme perché alto 181 cm.
- Carlo non appartiene all'insieme perché la sua altezza è di 179 cm.

# TEORIA CLASSICA DEGLI INSIEMI

---

Questo non rappresenta correttamente la conoscenza del pensiero umano che usa termini vaghi di descrizione:

- la temperatura è molto alta
- l'acqua è abbastanza fredda

L'uso di un insieme *Crisp* è limitativo per rappresentare un **concetto sfumato**:  
L'Economia, come altre discipline, richiedono modelli di ragionamento che tengano conto delle intrinseche imprecisioni degli oggetti di indagine.

È quindi necessario riformulare la nozione di insieme in modo più realistico, introducendo il concetto di **Insieme Fuzzy**.

# CONCETTO DI INSIEME FUZZY

---

L'*Insieme Fuzzy* (*insieme sfumato*) corrisponde ad un insieme di oggetti nel quale non c'è un confine ben preciso o definito tra gli oggetti che vi appartengono e quelli che non vi appartengono.

La *Logica Fuzzy* permette di descrivere e operare con definizioni vaghe: la potenzialità espressiva viene aumentata.

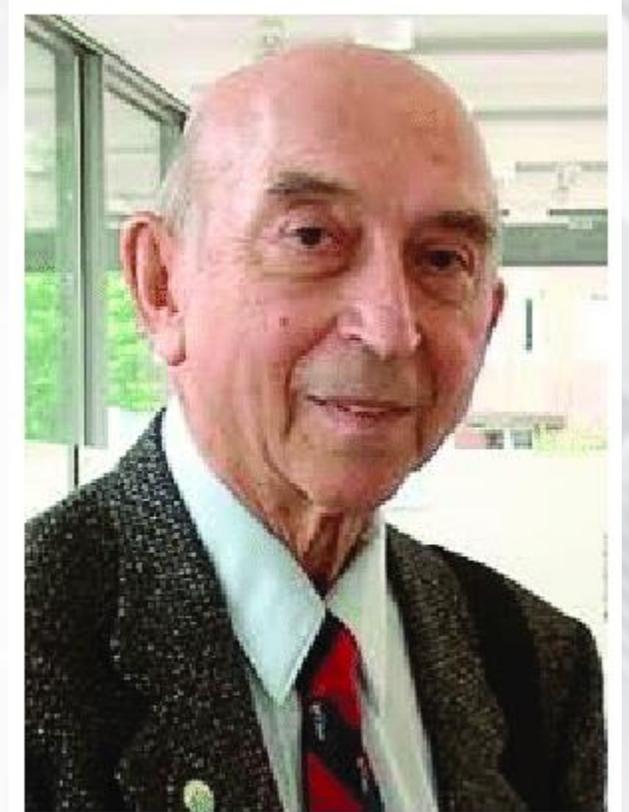
- Giovanni è molto alto
- Carlo è relativamente alto

# TEORIA DEGLI INSIEMI FUZZY

---

La teoria degli insiemi Fuzzy è stata introdotta più di 50 anni fa dall'ingegnere matematico Lotfi Zadeh.

– Zadeh L.A., “Fuzzy Sets”, *Information and Control*, vol.8 (1965)



# TEORIA DEGLI INSIEMI FUZZY

---

Zadeh estese il concetto di «insieme» a quello di *Insieme Fuzzy* con lo scopo di giungere a una descrizione più precisa degli insiemi che incontriamo nella vita reale.

Questo fu ottenuto sostituendo alla rigida relazione di appartenenza dell'ordinaria teoria degli insiemi, basata sul *principio del terzo escluso*; la relazione più flessibile che prevede un *grado di appartenenza* di ciascun oggetto.

# DEFINIZIONE DI INSIEME FUZZY

---

Dato un **dominio**  $X$ , con  $x$  generico elemento di  $X$ , si definisce *insieme Fuzzy*  $A$  in  $X$  l'insieme delle coppie

$$A = \{[x, f_A(x)]\}$$

caratterizzato da una *funzione di appartenenza*  $f_A(x)$  che associa ad ogni elemento di  $X$  un numero reale nell'intervallo  $[0,1]$ .

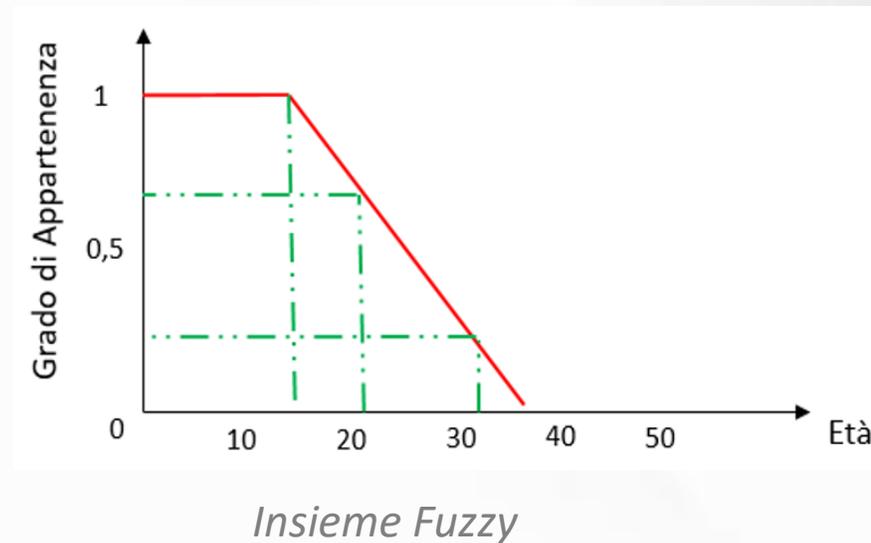
Il valore di  $f_A(x)$  rappresenta il **grado di appartenenza** di  $x$  in  $A$ .

- Per  $f_A(x)=1$  diremo che  $x$  *appartiene sicuramente* ad  $A$
- Per  $f_A(x)=0$  diremo che  $x$  *non appartiene* ad  $A$
- Per  $0 < f_A(x) < 1$  diremo che  $x$  *appartiene parzialmente* ad  $A$

# CONCETTO DI INSIEME FUZZY

Il concetto di Insieme *Fuzzy* estende il concetto di insieme *Crisp* mediante l'introduzione di un **grado di appartenenza**.

Esempio:



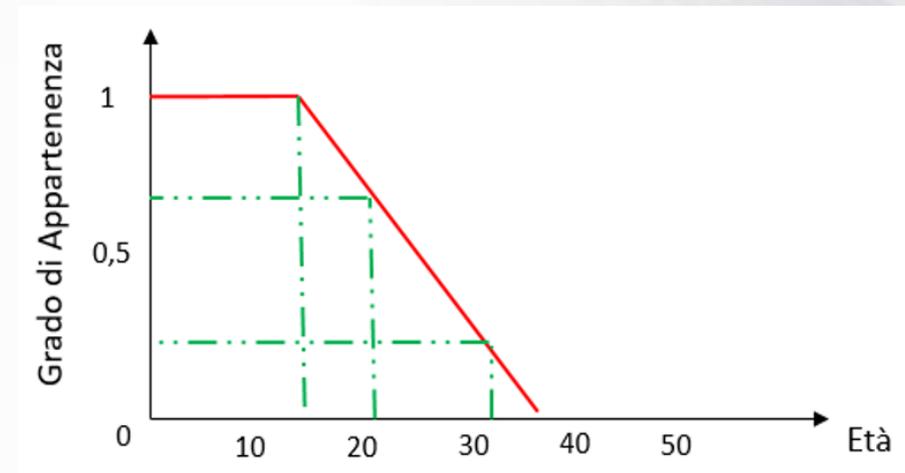
Definizione dell'insieme delle persone giovani

# CONCETTO DI INSIEME FUZZY

---

Mediante il ***grado di appartenenza*** all'insieme è possibile rappresentare affermazioni "vaghe" come:

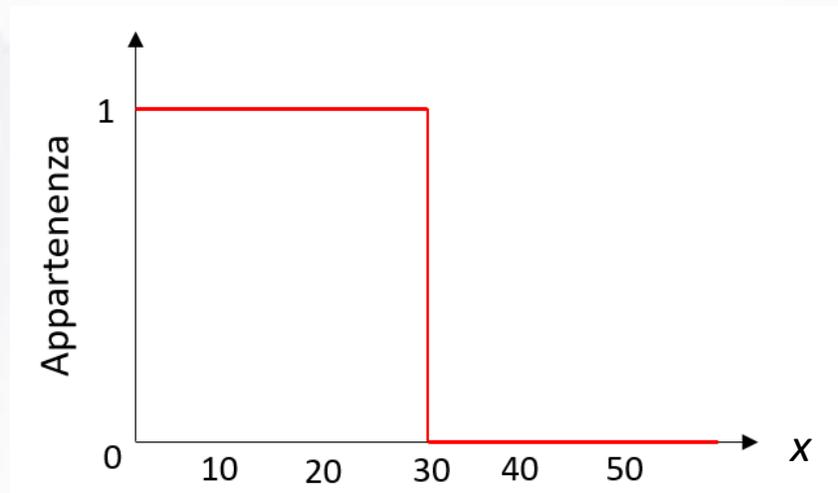
- una persona di 15 anni è molto giovane
- una persona di 27 anni è giovane
- una persona di 35 anni è relativamente giovane



# CONCETTO DI INSIEME FUZZY

---

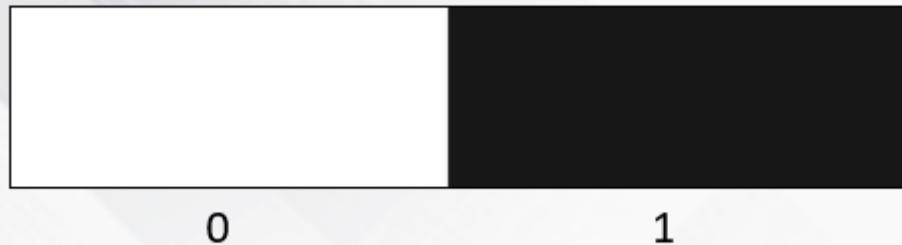
L'*Insieme Fuzzy* si riduce ad un insieme ordinario se la funzione di appartenenza assume unicamente valori 0 e 1



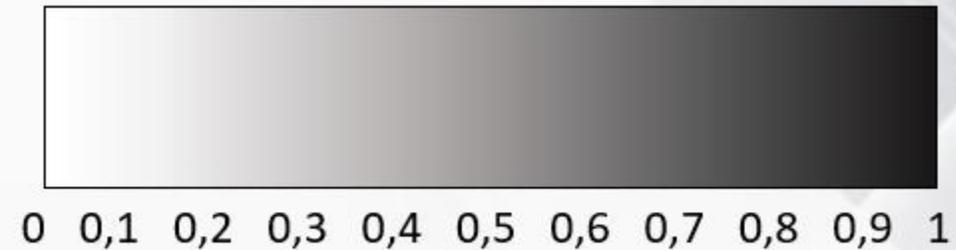
In tal caso l'insieme Crisp può essere considerato come un caso particolare di Insieme Fuzzy.

# CONCETTO DI INSIEME FUZZY

La *logica Fuzzy* usa un continuo di valori logici tra 0 (si esclude l'appartenenza o completamente falso) e 1 (massima appartenenza o completamente vero)



*Logica Booleana*



*Logica Fuzzy*

# CONCETTO DI INSIEME FUZZY

---

Se  $x$  e  $y$  sono elementi di  $X$ , la seguente disuguaglianza:

$$F_A(x) < F_A(y)$$

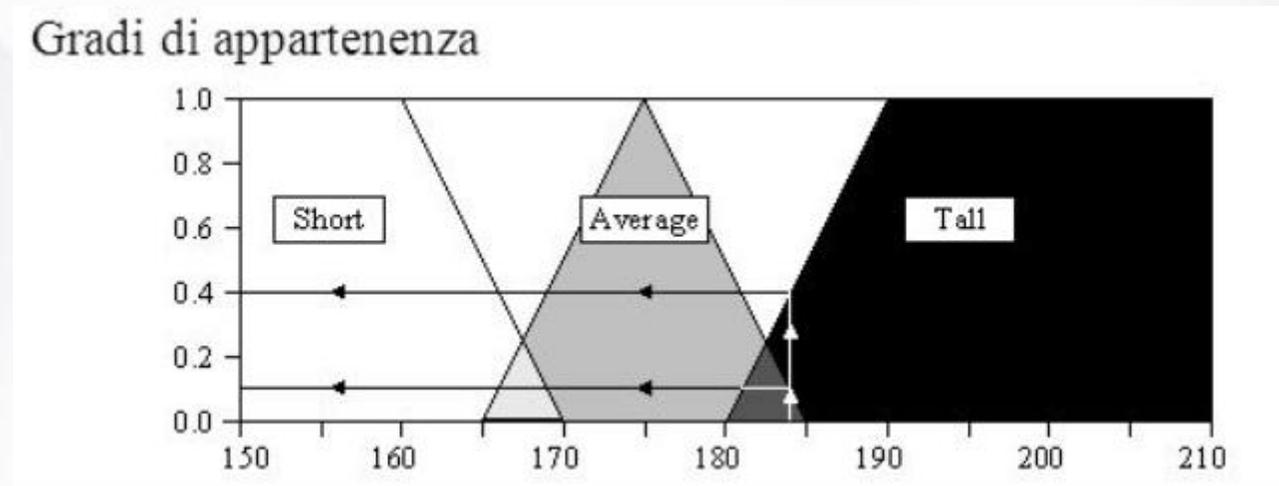
Equivale alla proposizione:

La disponibilità di accettare  $x$  come elemento di  $A$  è minore della disponibilità di accettare  $y$  in  $A$ .

# INSIEME FUZZY

L'esempio dalla statura può essere espresso tramite tre insiemi Fuzzy:

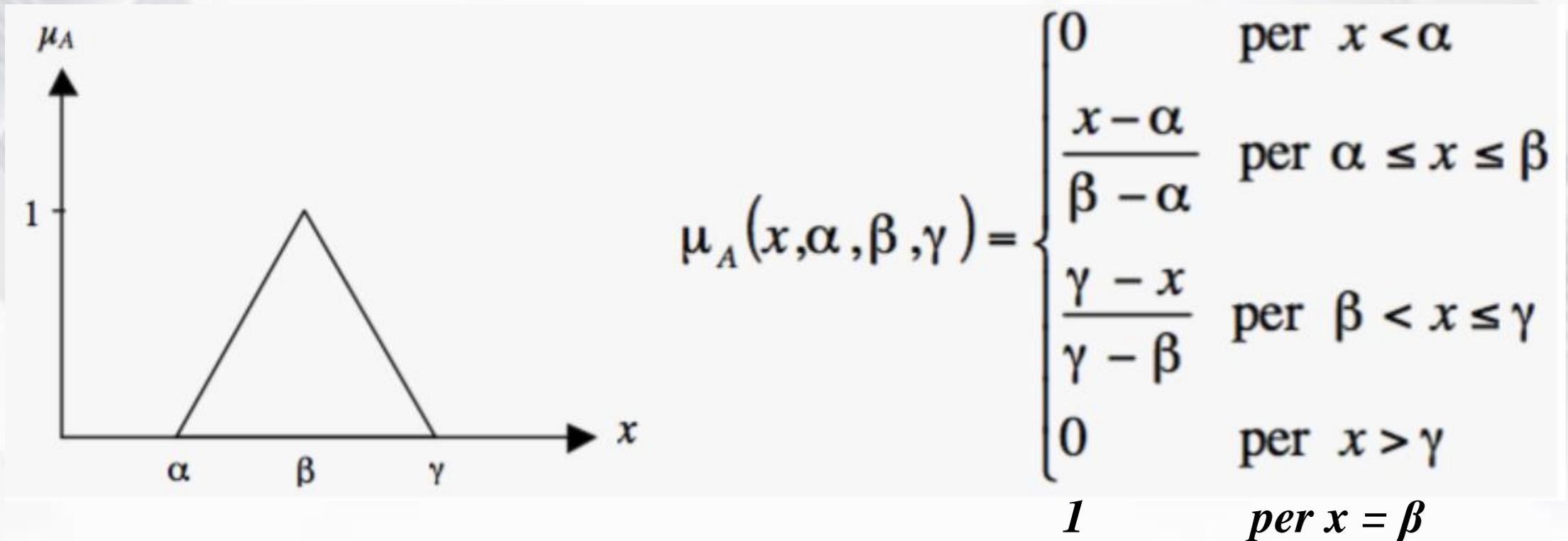
- Basso
- Medio
- Alto



Gli insiemi Fuzzy sono rappresentati tipicamente con funzioni triangolari o trapezoidali.

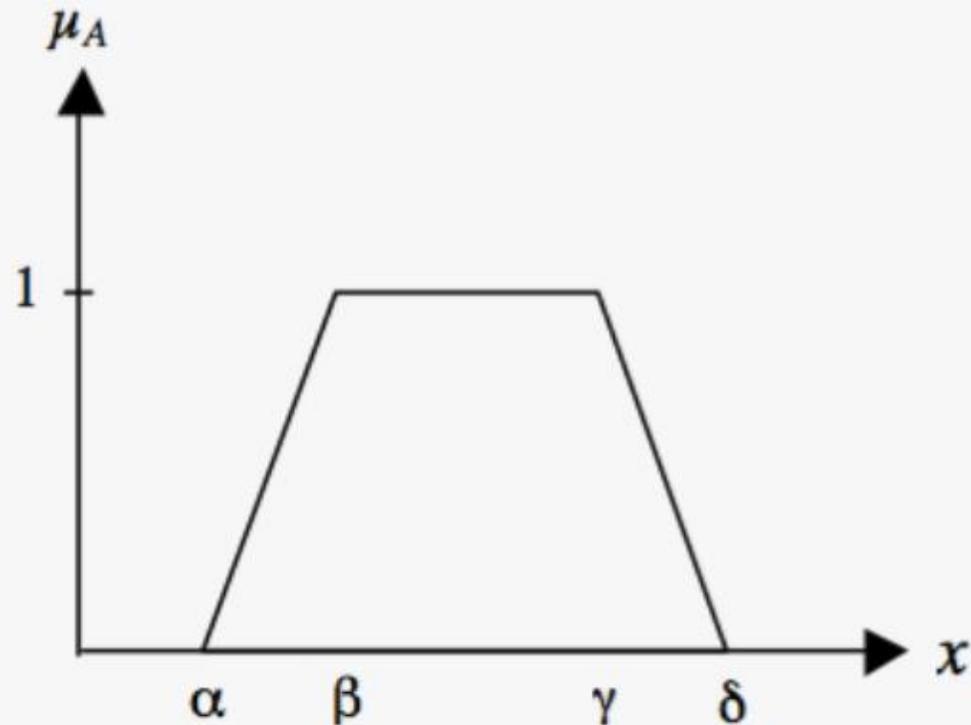
# INSIEME FUZZY: Funzione di Appartenenza

*Funzione di appartenenza triangolare:*



# INSIEME FUZZY: Funzione di Appartenenza

*Funzione di appartenenza trapezoidale:*



$$\mu_A(x, \alpha, \beta, \gamma, \delta) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < \alpha \\ \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} & \text{per } \alpha \leq x \leq \beta \\ 1 & \text{per } \beta < x \leq \gamma \\ \frac{\delta - x}{\delta - \gamma} & \text{per } \gamma < x \leq \delta \\ 0 & \text{per } x > \delta \end{cases}$$

# STRUTTURA FUZZY: Elementi costitutivi

---

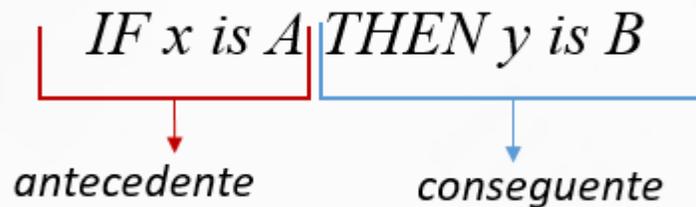


# FUZZIFICAZIONE, INFERENZA E DEFUZZIFIER

**Fuzzifier:** le variabili di ingresso (dati precisi) trasformate in dati fuzzy

*variabile x* → *grado di appartenenza* → *funzione di appartenenza*

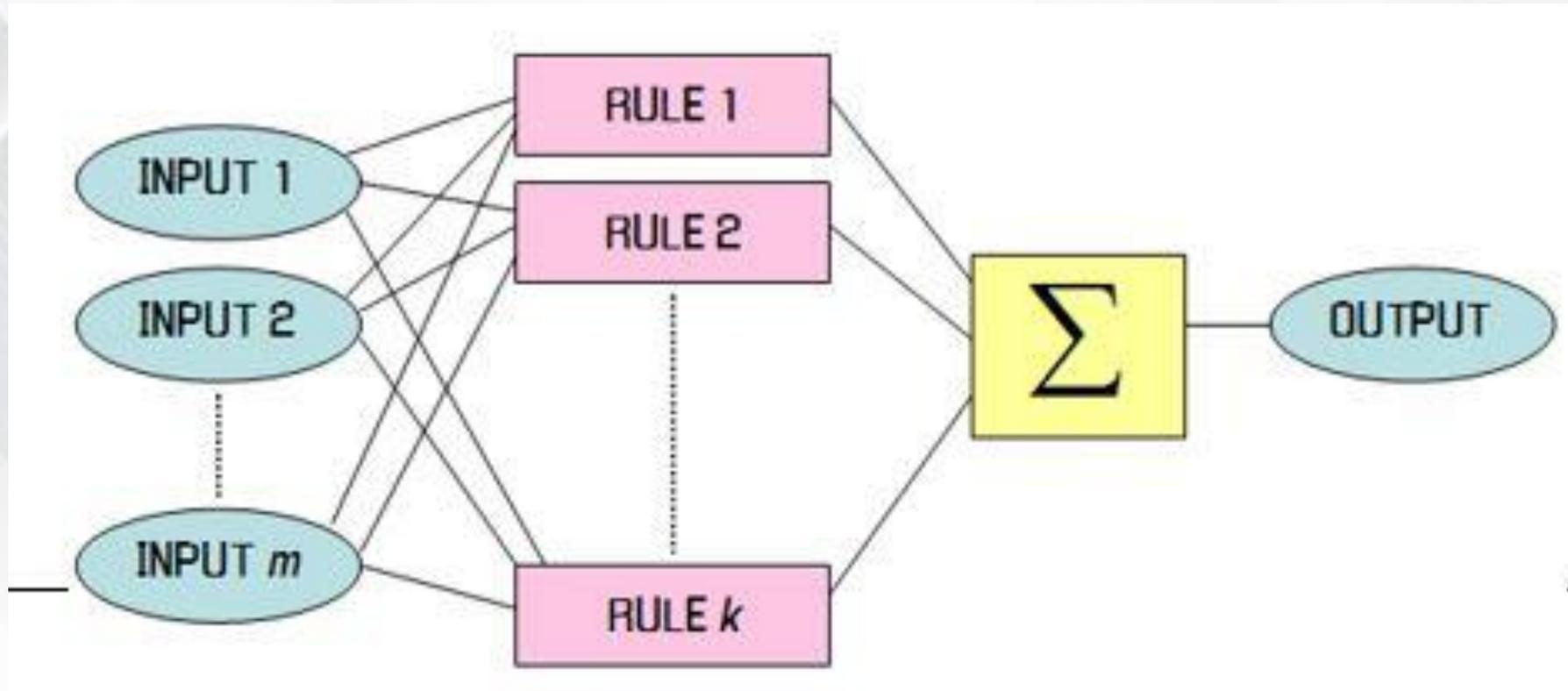
**Processo di inferenza:** Insieme di regole Fuzzy, **Rule Base**, quella più utilizzata: *If...Then....*



A e B sono i *valori linguistici*



# STRUTTURA FUZZY: Processo di inferenza



# STRUTTURA FUZZY

---

A. FUZZIFICAZIONE DELLE VARIABILI INPUT

B. APPLICAZIONE DEL METODO DI IMPLICAZIONE

C. AGGREGAZIONE DI TUTTI GLI OUTPUT

D. DEFUZZIFICAZIONE

# STRUTTURA FUZZY

---

I sistemi gestiti con logica Fuzzy sono in rapida espansione in molti campi, prevalentemente le aree di utilizzo sono relative ai sistemi di supporto alle decisioni.



«*Soft-computing*»

# LOGICA FUZZY: Un esempio dell'applicazione

Immaginiamo di voler definire il livello di importanza di potenziali cliente per meglio finalizzare un programma di investimento.

CICLO DI VITA	<ul style="list-style-type: none"><li>• Adulto – 37-47</li><li>• Maturo – 47-57</li><li>• Anziano &gt; 57</li></ul>
---------------	---

FOCUS STRATEGICO	<ul style="list-style-type: none"><li>• Assolutamente Importante<ul style="list-style-type: none"><li>• Molto Importante</li><li>• Importante</li></ul></li></ul>
------------------	---

-Antecedente la variabile linguistica **Età**      -Consequente la variabile linguistica **Focus strategico**

1. IF (**Età IS Maturo**) THEN (**Focus Strategico IS Assolutamente Importante**)
2. IF (**Età IS Adulto**) THEN (**Focus Strategico IS Molto Importante**)
3. IF (**Età IS Anziano**) THEN (**Focus Strategico IS Importante**)

# LOGICA FUZZY: Un esempio dell'applicazione

---

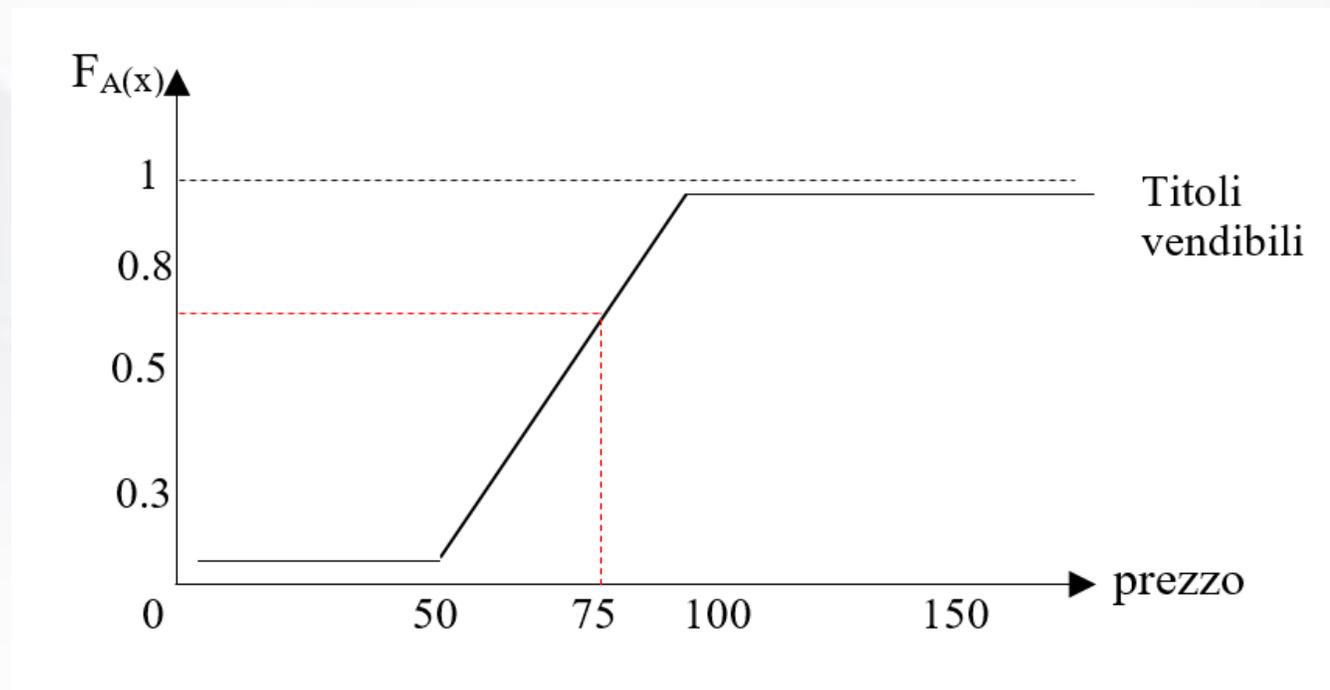
Supponiamo di voler definire l'insieme dei *titoli da vendere*.

Sicuramente possiamo ritenere che titoli con un prezzo molto basso, inferiore a una certa soglia (esempio 50), non sono vendibili con profitto; mentre quelli con prezzo molto elevato (esempio superiore a 100) possono essere venduti profittevolmente.

Il problema si pone per i titoli con prezzo intermedio, che a seconda dei casi possono essere considerati da vendere o meno.

# LOGICA FUZZY: Un esempio dell'applicazione

$f_A(x)$ =in che misura un titolo appartiene alla classe di «titoli da vendere»



# COMPLEMENTO DI UN INSIEME

---

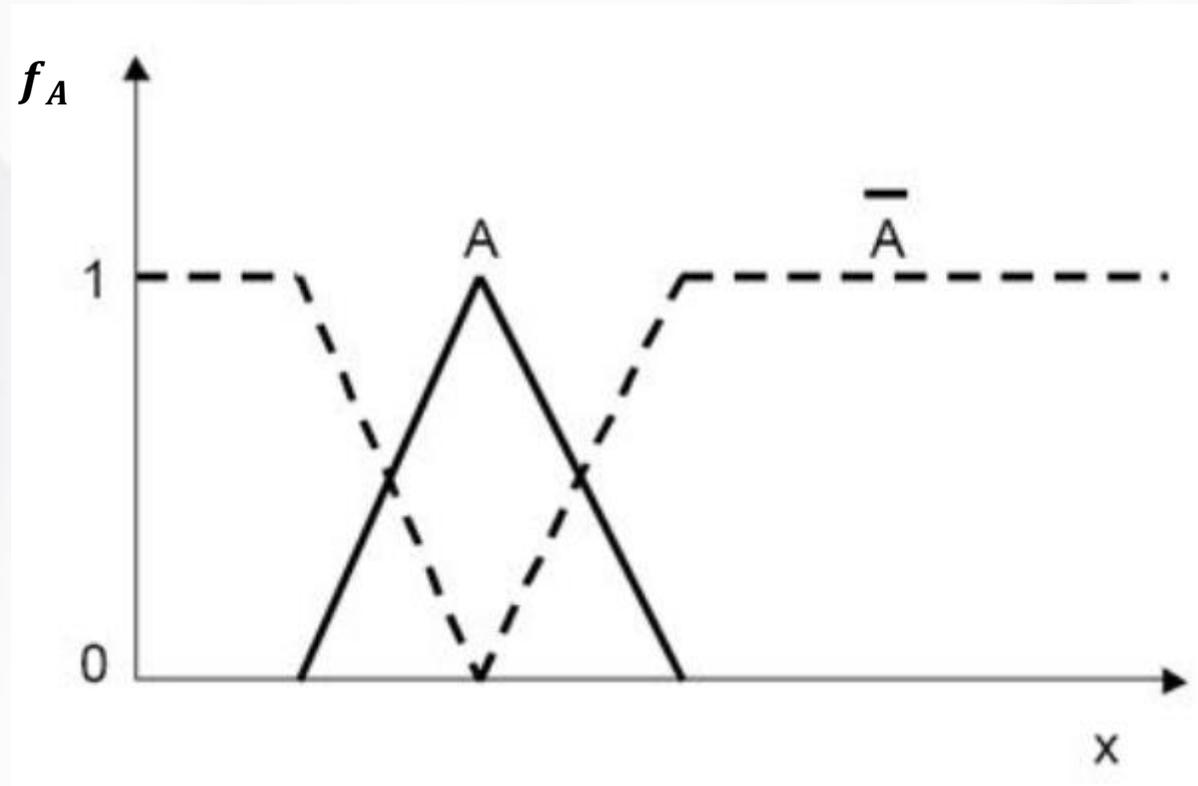
- Per gli *insiemi tradizionali*, il **complemento** di un insieme è l'*opposto* dell'insieme.

Esempio: l'insieme delle persone alte, il suo complemento è il suo opposto cioè l'insieme delle persone NON alte.

- Per gli *insiemi Fuzzy*, il suo **complemento** che indichiamo  $\sim A$  è ottenuto come segue:

$$f_{\sim A}(x) = 1 - f_A(x)$$

# COMPLEMENTO DI UN INSIEME FUZZY



# APPARTENENZA ALL'INSIEME

---

- Negli *insiemi tradizionali*, tutti gli elementi di un insieme appartengono interamente al sopra-insieme.
- Negli *insiemi Fuzzy* ogni elemento può **appartenere** di meno al sotto-insieme che al sopra-insieme: questo dipende dal grado di appartenenza.

# INTERSEZIONE DI DUE INSIEMI

---

- Negli *insiemi classici*, si considerano gli elementi che appartengono a entrambi gli insiemi: un'intersezione tra due insiemi contiene gli elementi condivisi.
- Negli *insiemi Fuzzy* si considera quanto appartiene un elemento a entrambi gli insiemi: un elemento può appartenere parzialmente ai due insiemi con diversi gradi di appartenenza.

L'intersezione tra insieme Fuzzy è definita come **il grado di appartenenza più basso**.

L'*intersezione* di due insiemi Fuzzy A e B sull'universo del discorso X:

$$f_A \cap f_B = \min[f_A(x), f_B(x)]$$

# UNIONE DI DUE INSIEMI

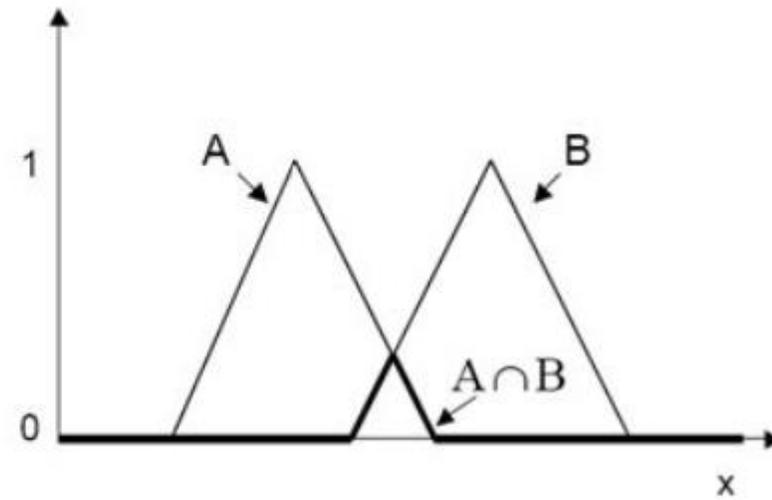
---

- Negli *insiemi tradizionali*, l'insieme **unione** di due insiemi classici è formato da tutti gli elementi che appartengono sia all'uno che all'altro.
- Negli *insiemi Fuzzy* l'**unione** è l'inverso dell'intersezione cioè è il grado di appartenenza più alto degli elementi di entrambi gli insiemi.

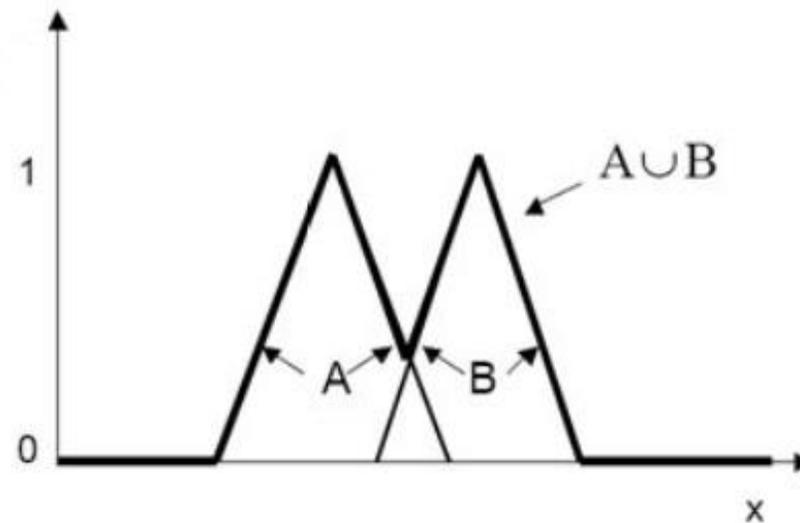
L'insieme unione di due insiemi Fuzzy A e B sull'universo del discorso X:

$$f_A \cup f_B = \max[f_A(x), f_B(x)]$$

## ■ Intersezione



## ■ Unione



# PROPRIETA' DEGLI INSIEMI FUZZY: Uguaglianza

Un insieme Fuzzy è **uguale** a un altro insieme se

$$f_A(x_i) = f_B(x_i) \quad \forall x \in X$$

Esempio:

$$A = 0,3/1 + 0,5/2 + 1/3$$

$$B = 0,3/1 + 0,5/2 + 1/3$$

Pertanto l'insieme A= l'insieme B

# PROPRIETA' DEGLI INSIEMI FUZZY: Inclusione

---

- L'insieme Fuzzy  $A$ , dove  $A \subseteq X$ , è ***incluso*** in un insieme Fuzzy  $B$ , con  $B \subseteq X$ , se

$$f_A(x) \leq f_B(x) \quad \forall x \in X$$

Ciò vuol dire che  $A$  è un sottoinsieme di  $B$ .

**Esempio:**

si consideri  $X = \{1, 2, 3\}$  e gli insiemi  $A$  e  $B$

$$A = 0.3/1 + 0.5/2 + 1/3;$$

$$B = 0.5/1 + 0.55/2 + 1/3$$

allora  $A$  è un sottoinsieme di  $B$ , or  $A \subseteq B$

# PROPRIETA' DEGLI INSIEMI FUZZY: Cardinalità

---

- La *cardinalità* negli *insiemi tradizionale* è il numero degli elementi.
- La *cardinalità* di un *insieme Fuzzy* è la somma dei valori dei gradi di appartenenza di A,  $f_A(x)$

$$card_A = f_A(x_1) + f_A(x_2) + \dots + f_A(x_n) = \sum f_A(x_i), \quad i = 1 \dots n$$

Esempio:  $X = \{1, 2, 3\}$  e insiemi A e B

$$A = 0.3/1 + 0.5/2 + 1/3;$$

$$B = 0.5/1 + 0.55/2 + 1/3$$

$$card_A = 1.8$$

$$card_B = 2.05$$

# PROPRIETA' DEGLI INSIEMI FUZZY: *Fuzzy set vuoto*

---

Un insieme Fuzzy  $A$  è vuoto se e solo se:

$$f_A(x) = 0, \quad \forall x \in X$$

Esempio: se  $X = \{1, 2, 3\}$  e l'insieme  $A$

$$A = 0/1 + 0/2 + 0/3$$

allora  $A$  è vuoto

# IL NUCLEO E IL SUPPORTO DI UN INSIEME FUZZY

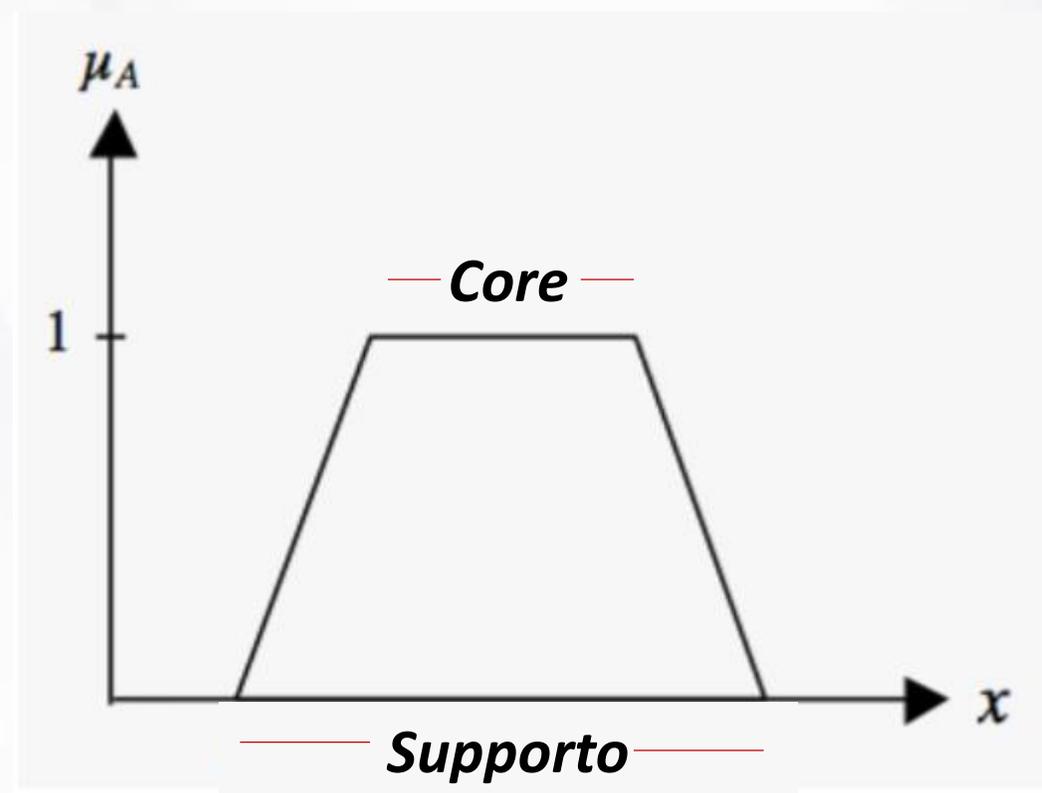
Si consideri  $A$  un sottoinsieme Fuzzy di  $X$ , il **supporto** di  $A$  è il sottoinsieme tradizionale di  $X$  consistente di tutti gli elementi con grado di appartenenza non nullo:

$$\text{supp}_{(A)} = \{x | f_A(x) > 0\}$$

Il **nucleo** di  $A$  è il sottoinsieme tradizionale di  $X$  consistente di tutti gli elementi, la cui funzione di appartenenza è pari a 1:

$$\text{core}_{(A)} = \{x | f_A(x) = 1\}$$

# II NUCLEO E IL SUPPORTO DI UN INSIEME FUZZY



# OPERAZIONI MATEMATICHE

---

- **Prodotto:**

$$aA = \{a f_A(x), \quad \forall x \in X\}$$

Esempio: sia  $a = 0.5$ , e

$$A = \{0.5/a, 0.3/b, 0.2/c, 1/d\}$$

allora

$$aA = \{0.25/a, 0.15/b, 0.1/c, 0.5/d\}$$

# OPERAZIONI MATEMATICHE

---

- **Potenza:**

$$A^a = \{ f_A(x)^a, \quad \forall x \in X \}$$

Esempio: sia  $a = 2$ , e

$$A = \{0.5/a, 0.3/b, 0.2/c, 1/d\}$$

allora

$$A^a = \{0.25/a, 0.09/b, 0.04/c, 1/d\}$$

# La Teoria dei Fuzzy Sets

---



shutterstock.com • 279017897

