Università degli Studi **Mediterranea** di Reggio Calabria

DECISIONS_LAB FOR COVID-19

Corso di Matematica per l'Economia

ESERCITAZIONE

Prof. **Massimiliano Ferrara**
Prof. **Bruno Antonio Pansera**

A cura della Dott.ssa **Mariangela Gangemi**

DIPARTIMENTO DI ECCELLENZA

DiGiES

DIPARTIMENTO GIURISPRUDENZA ECONOMIA SCIENZE UMANE

International Program

Terza Missione

Anno Accademico 2020-2021

Esercizio 1

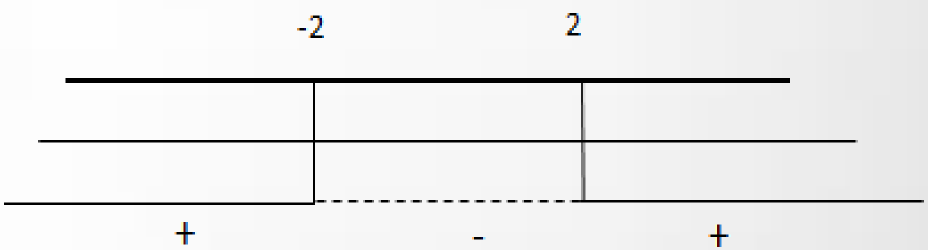
Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$y = ln\frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$$

1. Dominio

$\frac{x^2+4}{x^2-4} > 0$

$N > 0 \qquad x^2 + 4 > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$



$D > 0 \qquad x^2 - 4 > 0 \qquad x < -2 \;\vee\; x > 2$

$$x \in \left]-\infty; -2\right[\cup \left]2; +\infty\right[$$

2. Simmetrie

$$f(-x) = \ln\frac{(-x)^2+4}{(-x)^2-4} = \ln\frac{x^2+4}{x^2-4} = f(x)$$

La funzione è pari.

3. Intersezione con gli assi

ASSE X

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \ln\dfrac{x^2+4}{x^2-4} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ \ln\dfrac{x^2+4}{x^2-4} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ \ln\dfrac{x^2+4}{x^2-4} = \ln 1 \end{cases}$$

$\frac{x^2+4}{x^2-4} = 1 \qquad \Rightarrow \mathit{Equazione\ Impossibile}$

Non esistono intersezioni con l'asse *x*.

ASSE Y

Non esistono intersezioni con l'asse *y*.

4. Studio del segno

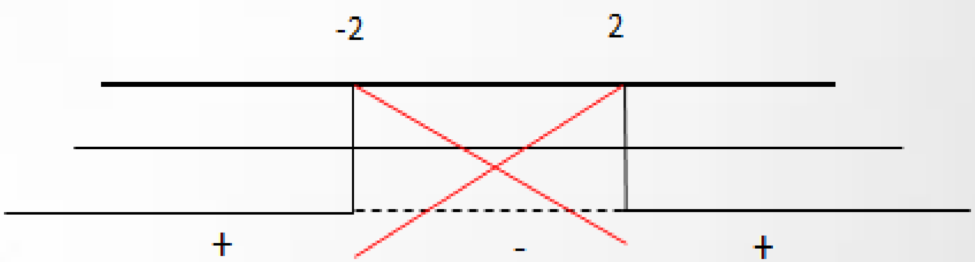
$$\ln\frac{x^2+4}{x^2-4} > 0$$

$$\ln\frac{x^2+4}{x^2-4} > \ln 1$$

$$\frac{x^2+4}{x^2-4} > 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{8}{x^2-4} > 0$$

$$N > 0 \qquad \forall x \in D$$

$$D > 0 \qquad x^2 - 4 > 0 \qquad x < -2 \;\vee\; x > 2$$



5. Comportamento della funzione agli estremi del dominio

$$\lim_{x \to \pm\infty} \ln \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} = \ln \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} = \frac{\infty}{\infty}$$

Questo limite si presenta della forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ che si risolve utilizzando il teorema di De L'Hospital:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{2x} = 1$$

Quindi:

$$\ln \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} = \ln 1 = 0$$

$y = 0$ è un asintoto orizzontale completo.

$$\lim_{x\to -2^-} \ln\frac{x^2+4}{x^2-4} = \ln\frac{(-2)^2+4}{(-2)^2-4} = \ln\frac{8}{0^+} = +\infty$$

$x = -2$ è un asintoto verticale a sinistra

$$\lim_{x\to 2^+} \ln\frac{x^2+4}{x^2-4} = \ln\frac{(2)^2+4}{(2)^2-4} = \ln\frac{8}{0^+} = +\infty$$

$x = 2$ è un asintoto verticale a destra

6. Derivata prima: crescenza, decrescenza, massimi e minimi relativi

$$y' = \frac{1}{\frac{x^2+4}{x^2-4}} \cdot \frac{2x(x^2-4)-(x^2+4)2x}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2-4}{x^2+4} \cdot \frac{2x^3-8x-2x^3-8x}{(x^2-4)^2}$$
$$= \frac{-16x}{(x^2+4)(x^2-4)}$$

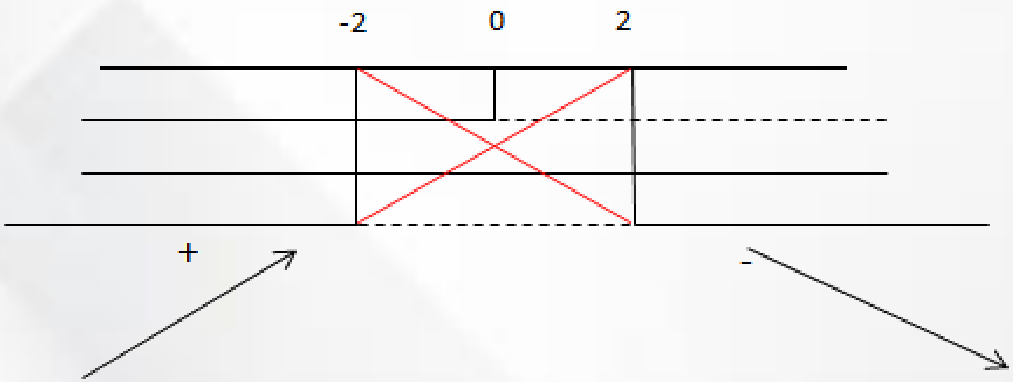
$y' \geq 0$

$\frac{-16x}{(x^2+4)(x^2-4)} \geq 0$

$N: -16x \geq 0 \qquad x < 0$

$D_1: (x^2+4) > 0 \qquad \forall x \in D$

$D_2: (x^2-4) > 0 \quad x < -2 \;\vee\; x > 2$



Non esistono massimi e minimi.

7. Derivata seconda: concavità, convessità, flessi

$$y'' = \frac{-16(x^4-16)+16x(4x^3)}{(x^2+4)^2(x^2-4)^2} = \frac{-16x^4+256+64x^4}{(x^2+4)^2(x^2-4)^2} = \frac{48x^4+256}{(x^2+4)^2(x^2-4)^2}$$

$y'' \geq 0$

$N: 48x^4 + 256 \geq 0 \qquad \forall x \in D$

$D_1: (x^2+4)^2 > 0 \quad \forall x \in D$

$D_2: (x^2-4)^2 > 0 \quad \forall x \in D$

La funzione volge la concavità verso l’alto.

Il grafico della funzione è riportato in figura:

Esercizio 2

Risolvere il seguente limite di una funzione composta:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{1-\cos(1-x)}}{2x^2-x-1} = \frac{\sqrt{1-1}}{2-1-1} = \frac{0}{0}$$

È necessario scomporre il denominatore. In generale si ha:

$$ax^2 + bx + c$$

Se il discriminante è una quantità maggiore di zero, le soluzioni dell’equazione sono due x_1 e x_2, quindi il polinomio si scompone come:

$$a(x-x_1)(x-x_2)$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 8 = 9$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{cases}$$

Quindi il polinomio si scompone nel seguente modo:

$(2x + 1)(x - 1)$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{1 - \cos(1 - x)}}{(2x + 1)(x - 1)} =$$

Sfruttiamo la proprietà della funzione coseno:

$$\cos(-x) = \cos x$$

Quindi nel nostro caso si avrà:

$$\cos(1-x) = \cos[-(x-1)] = \cos(x-1)$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{1-\cos(x-1)}}{(2x+1)(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{2x+1} \cdot \frac{\sqrt{1-\cos(x-1)}}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{2x+1} \cdot \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{1-\cos(x-1)}}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{2x+1} \cdot \lim_{x\to 1^+} \sqrt{\frac{1-\cos(x-1)}{(x-1)^2}} =$$

Per risolvere il secondo limite si effettua un cambio di variabile ponendo:

$$x-1=t$$

Quando $x \to 1^+$ $t \to 0^+$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{2x+1} \cdot \lim_{t \to 0^+} \sqrt{\frac{1-\cos t}{t^2}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Calcolando il limite si ottiene:

$$= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

Esercizio 3

Calcolare il seguente integrale:

$$\int 2\,x \arctan x \;\, dx = 2\int x \arctan x \, dx =$$

$f(x) = \arctan x$
$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$g'(x) = x\,dx$
$g(x) = \frac{1}{2}x^2$

$$= 2\left[\frac{1}{2}x^2 \arctan x - \int \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{2}x^2\,dx\right] =$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx\right] = x^2 \arctan x - \int \frac{x^2}{1+x^2}dx \;**$$

Risolviamo questo integrale:

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx =$$

$$= \int \left(\frac{x^2+1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= \int dx - \int \frac{1}{1+x^2}dx = x - \arctan x$$

$$**\; x^2 \arctan x - x + \arctan x + c$$

Esercizio 4

Calcolare il rango della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il determinante:

$$det(A) = \left|\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{matrix} = 0$$

$$r(A) = 1$$