Lezione1: Tassonomia dei Giochi ed Equilibri

Massimiliano Ferrara*

Università *Mediterranea* di Reggio Calabria & Decisions Lab
* con Bruno A. Pansera

Outline

A metá del XVII secolo, uno scambio di lettere tra due importanti matematici, **Blaise Pascal** e **Pierre de Fermat** datato Luglio 1654 ha gettato le basi per la Teoria della Probabilitá e per l'attuale Teoria dei Giochi.
L'espressione **Teoria dei Giochi** fu usata per la prima volta da **Emil Borel** nel 1920. Borel si occupó nella *Theorie des jeux* di giochi a somma zero con due giocatori e cercó di trovare una soluzione nota come concetto di Von Neumann di soluzione di un gioco a somma zero.
La nascita della moderna **Teoria dei Giochi (T.G.)** viene fatta, peró, normalmente coincidere con l'uscita del libro *Theory of Games and Economic Behavior* di **John von Neumann** e **Oskar Morgenstern** nel 1944.

Giochi Cooperativi, non cooperativi e competitivi

Definizione

Un **gioco strategico** é un modello d'interazione tra decisori, chiamati anche **giocatori**, in cui ognuno pianifica le proprie azioni una volta per tutte e queste ultime vengono effettuate simultaneamente.

Nella T.G. si considerano individui **razionali** e **intelligenti**. Per individuo razionale intendiamo un individuo capace di ordinare le sue preferenze dato un insieme di risultati; per individuo intelligente intendiamo un individuo capace di riconoscere le azioni necessarie a massimizzare la propria utilitá.

Giochi Cooperativi, non cooperativi e competitivi

J.Von Neumann

Nei **Giochi Cooperativi (G.C.)** si studia il formarsi di coalizioni con accordi sottoscritti e vincolanti che possono essere di vantaggio ai singoli componenti.

J. Nash

Nei **Giochi Non Cooperativi (G.N.C.)** si studiano i meccanismi delle decisioni dei singoli sulla base di ragionamenti individuali in assenza di alleanze vincolanti. Non c'é spazio per la cooperazione perché gli interessi sono contrastanti anche se ció non significa necessariamente che una delle parti deve perdere.

Introduzione

1. Si ricorre alla prima categoria di modello quando i vari agenti economici coinvolti nello stesso possono giungere ad un accordo coalizzante. In questo caso l'obiettivo di fondo diventa il conseguimento del miglior risultato possibile per tutti i partecipanti all'accordo considerati.
2. Se, al contrario, ciascun agente cerca di prevalere sull'altro al fine di ottenere un risultato che sia massimizzante degli obiettivi personali, si configureranno modelli appartenenti alla seconda categoria.

Giochi Strettamente Competitivi

Definizione

Un gioco si dice *strettamente competitivo* se vi partecipano due giocatori e , per ogni coppia di possibili risultati u_1 e u_2, si ha che se il giocatore 1 preferisce il risultato u_1 al risultato u_2, allora il giocatore 2 preferisce u_2 ad u_1.

Definizione

Un gioco a due persone a *somma zero* (o a *somma nulla*) é tale che $n = 2$ e per ogni coppia di decisioni prese separatamente dai partecipanti la somma algebrica dei risulati é nulla. Un gioco a n persone ($n \geq 2$) a *somma (non) costante* é tale che, per ogni n-pla di decisioni prese separatamente dai partecipanti, la somma algebrica degli n risultati é (non) costante e diversa da zero.

Indicando con X_1 e X_2 l'insieme delle possibili strategie dei due giocatori ed introducendo una funzione di utilitá del tipo $u : X \to \mathbb{R}$ scelta in modo che si possa sempre stabilire un raking di scelte:

$$x_1 \succ x_2 \Leftrightarrow u(x_1) \succ u(x_2)$$

$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow u(x_1) = u(x_2)$$

con $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$.
Nel caso di un gioco a somma nulla avremo:

$$u_1(x_1, x_2) + u_2(x_1, x_2) = 0 \;\; \forall (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$$

dove con u_1 (u_2) si indica la funzione di utilitá del giocatore 1 (2).

Giochi in Forma Strategica

Definizione

Un gioco, indicato con Γ, in **forma strategica** consiste di:

1. un insieme di giocatori $N = \{1, 2, \cdots, n\}$;
2. un sottoinsieme di strategie S^i, per ogni giocatore i, inteso come sottoinsieme dello spazio ad m dimensione, $S^i \subset \mathbb{R}^m$, indicando con m il numero delle diverse strategie adottabili da ciascun sogetto; $S = S^1 \times \cdots \times S^n$ é lo spazio delle strategie dell'intero gioco; $s^i \in S^i$ é la singola strategia del giocatore i; $s = (s^1, \cdots, s^n) \in S$ é la combinazione di n strategie individuali (in altre parole una strategia per ogni giocatore);
3. una funzione di pagamento (o di payoff) per ogni giocatore i; $u^i(s) \in \mathbb{R}$ con $u(s) = (u^1(s), \cdots u^n(s)) \in \mathbb{R}^n$ é il vettore dei pagamenti individuali.

Giochi in Forma Strategica

Definizione

Un **giocatore razionale** é una coppia $(S, \geq)$, dove $\geq$ é una relazione su S tale che:

1. $\geq$ é riflessiva
2. $\geq$ é transitiva
3. $\geq$ é totale, ovvero dati $s, s' \in S$ si puó sempre dire se $s \geq s'$ oppure se $s' \geq s$.

Equilibrio

Sia $s \in S$ una combinazione di strategie individuali e sia $t^i \in S^i$ una generica strategia del giocatore i. Allora $S \setminus t^i$ é la n-pla di strategie ottenute dalla combinazione s, sostituendo S^i del giocatore i con la strategia t^i. Avremo quindi

$$S \setminus t^i = (s^1, \cdots, s^{i-1}, t^i, s^{i+1}, \cdots s^n).$$

J. Nash 1950

Un *punto di equilibrio* del gioco Γ é una combinazione di strategie $s^* \in S$ tale che, per ogni $i \in N$ e per ogni $t^i \in S^i$, si abbia $u^i(s^* \setminus t^i) \leq u^i(s^*)$.

Dilemma del Prigioniero

Questo esempio deriva dal Leviatano di Hobbes. Due persone, sospettate di aver commesso un reato sono detenute in celle separate. Ognuno puó scegliere di confessare (C) o non confessare (NC). La scelta di ciascuno dei due influenza anche il destino dell' altro. Infatti, se entrambi confessano, saranno condannati a 10 anni di prigione. Se solo uno dei due confessa, accusando dunque l'altro, potrá beneficiare di uno sconto di pena e avrá quindi solo 1 anno di carcere da scontare mentre l'altro sará condannato a 25 anni (per l'aggravante di non aver voluto collaborare). Se nessuno dei due confessa, in mancanza di prove testimoniali, ambedue le persone saranno accusate soltanto di danni al patrimonio e condannate a 3 anni di prigione.

Dilemma del Prigioniero

	C	NC
C	(10,10)	(1,25)
NC	(25,1)	(3,3)

Si suppone che i giocatori non possano stipulare accordi vincolanti fra loro (giochi non cooperativi): ciascun giocatore dovrá scegliere la propria azione solo in base alle informazioni in suo possesso. La strategia non confessa **é strettamente dominata** dalla strategia confessa. Eliminando le strategie strettamente dominate si arriva all'*equilibrio di Nash*, dove i due prigionieri confessano e hanno 10 anni di carcere. Il risultato migliore per i due ("ottimo paretiano") é naturalmente di non collaborare (1anno di carcere invece di 3), ma questo **non é** un equilibrio.