Corso di Laurea in Scienze Economiche L-33

Matematica per l'Economia
SECS-S/06 - 8 CFU

Prof. Massimiliano Ferrara

massimiliano.ferrara@unirc.it
massimiliano.ferrara@unibocconi.it

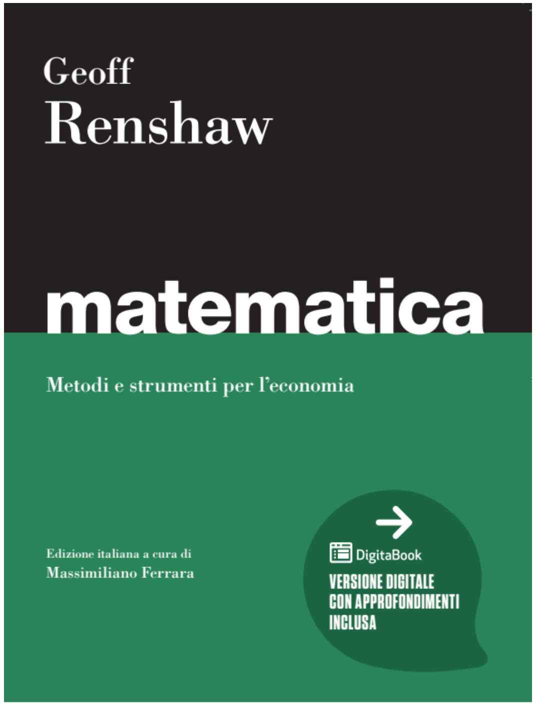
A.A. 2022/2023

Geoff Renshaw

Matematica. Metodi e strumenti per l’economia

Edizione italiana a cura di Massimiliano Ferrara

Capitolo 10 – Crescita composta e valore attuale



Progressione geometrica (1)

Una progressione geometrica è una successione della forma A, AR, AR^2, AR^3,…, con primo termine A e ragione R.

CARATTERISTICA ESSENZIALE: si passa da un termine al successivo **moltiplicando** per una costante, R.

Due formule:

1. l'n-esimo termine della progressione è: AR^{n-1}
2. la somma dei primi n termini è: $\sum_n = \frac{A(1-R^n)}{1-R}$ o $\sum_n = \frac{A(R^n-1)}{R-1}$

(Regola 10.2)

Progressione geometrica (2)

Esempio: Sia data la successione 1, 2, 4, 8, 16,… (A = 1, R = 2)

(a) Troviamo il 10° termine: $AR^{n-1} = 1 \times 2^9 = 512$

(b) Troviamo la somma dei prii 10 termini:

$$\sum_n = \frac{A(R^n-1)}{R-1} = \frac{1(2^{10}-1)}{2-1} = 1023$$

Un caso speciale (abbastanza frequente in economia):

Quando $0 < R < 1$, al crescere di n il termine R^n diventa più piccolo.

Per $n \to \infty$, $R^n \to 0$, perciò la formula della somma diventa:

$$\sum_\infty = \frac{A(1-R^n)}{1-R} = \frac{A(1-0)}{1-R} = \frac{A}{1-R}$$ (Regola 10.3)

Formula di crescita composta (1)

Si applica a un capitale o altra variabile che cresce a un tasso percentuale composto costante.

$y = a(1 + r)^x$ (Regola 10.4)

a = «capitale» ; *r* = tasso annuo di crescita; *x* = numero di anni

Esempio: Deposito € 100 in un conto di risparmio che rende il 4% annuo, con interessi composti. Qual è il montante dopo 5 anni?

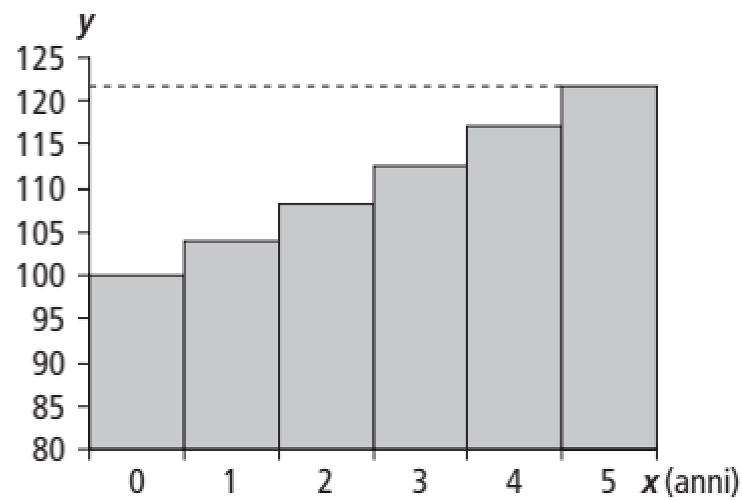
x	0	1	2	3	4	5
	100	104	108,16	112,49	116,99	121,67

Formula di crescita composta (2)

Possiamo illustrare la situazione graficamente (fig. 10.1).

Il grafico è una **funzione a gradini**. La formula $y = a(1 + r)^x$ descrive una crescita discontinua o discreta (cioè una crescita per salti successivi).

Figura 10.1 Crescita composta di un deposito bancario (Esempio 10.9) o di un indice dei prezzi (Esempio 10.11)



Caso di capitalizzazione più volte all'anno

Se l'interesse viene addizionato *n* volte all'anno, la formula di crescita composta diviene: $y = a(1 + \frac{r}{n})^{nx}$ (Regola 10.5)

Esempio: come nell'esempio precedente, ma con interessi composti due volte all'anno: $y = a(1 + \frac{r}{n})^{nx}$

x	0	½	1	1+½	2	2+½	3
	100	102	104,04	106,12	108,24	110,4	112,61

Ovviamente il valore di *y* è sempre più alto per ogni *n* > 1.

Tasso nominale e tasso effettivo

Quando si compone l'interesse più volte all'anno, il tasso di interesse effettivo è maggiore di quello nominale.

Nel precedente esempio, il tasso nominale è del 4% annuo mentre il tasso effettivo è del 4,04% (= tasso effettivo annuo).

(Regola 10.6) Tasso annuo effettivo (TAE)

$$\mathrm{TAE} = (1 + \frac{r}{n})^{n} - 1$$

Verifica: nell'esempio precedente, r = 0,04, n = 2. Perciò:

$\mathrm{TAE} = (1 + \frac{0{,}04}{2})^{2} - 1 = 4{,}04$; come in colonna 4 della tabella.

Valore attuale scontato

Utilizziamo la formula di crescita composta $y = a(1+r)^x$ per determinare *y*, il valore futuro, noto *a*, il valore iniziale della variabile. Affrontiamo il problema inverso di determinare il valore iniziale *a* noto il valore futuro, *y*.

Con semplici calcoli algebrici: $a = \frac{y}{(1+r)^x}$

a viene detto valore attuale scontato (VA) di *y*. È quanto dovremmo investire oggi per disporre di una somma *y* fra *x* anni (noto *r*, naturalmente).

Cambio di notazione: $y = \frac{a}{(1+r)^x}$ (Regola 10.7). (Per seguire la convenzione per cui *y* indica la variabile dipendente)

Valore attuale e comportamento economico

Il concetto di VA è importante in economia, sia quella teorica sia quella applicata. L'idea sottostante è che se un individuo (o un'impresa, o un'amministrazione pubblica) può ricevere in prestito liberamente una somma al tasso r, sarà **indifferente** rispetto a una somma futura a e il suo valore attuale, come da Regola 10.7. Le due somme sono perciò equivalenti.

Valore attuale di una sequenza di pagamenti futuri (1)

La Regola 10.7 si riferisce a un singolo pagamento di importo a fra x anni.

Per estensione, il VA di una sequenza di pagamenti di importi a_1, a_2, a_3,…, a_n da ricevere negli anni 1, 2, 3,…n è semplicemente la somma dei singoli VA:

$$VA = \frac{a_1}{(1+r)^1} + \frac{a_2}{(1+r)^2} + \frac{a_3}{(1+r)^3} + \dots + \frac{a_n}{(1+r)^n} \qquad \text{(Regola 10.9)}$$

Valore attuale di una sequenza di pagamenti futuri (2)

Caso speciale:

Supponiamo che nella Regola 10.9 sia: $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n$

Chiamiamo questo valore comune a. La regola diventa:

$$VA = \frac{a}{(1+r)} + \frac{a}{(1+r)^2} + \frac{a}{(1+r)^3} + \ldots + \frac{a}{(1+r)^n}$$

= somma di una progressione geom. con 1° termine $A = \frac{a}{(1+r)}$ e ragione $R = \frac{1}{(1+r)}$

Per la Regola 10.2b, $VA = \frac{\frac{a}{(1+r)}\left(1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^n\right)}{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)} = \frac{a}{r}\left(1-\frac{1}{(1+r)^n}\right)$

Valutazione di un investimento

Un’impresa che deve scegliere fra due investimenti alternativi opterà spesso per quello con il maggiore VA (Esempio 10.23)

Anni da oggi	1	2	3	4	5	Profitti totali
Profitti Progetto A	300	200	200	200	50	950
Profitti Progetto B	25	200	200	200	400	1025

Quando r = 5%, VA_A = 844, VA_B = 856. Si sceglie B

Quando r = 10%, VA_A = 756, VA_B = 723. Si sceglie A

Perché il VA maggiore dipende dal tasso di sconto?
(Assumiamo che entrambi gli investimenti abbiano gli stessi costi)

Tasso interno di rendimento (TIR)

Il TIR è il tasso di sconto che rende il VA dei profitti uguale al costo del progetto (Regola 10.10). Esempio:
Costo progetto: 500. Profitti 300,200,200,200,50 negli anni 1-5. Il TIR è allora $r_{\max}$ in:

$$500 = \frac{300}{(1 + r_{\max})} + \frac{200}{(1 + r_{\max})^2} + \frac{200}{(1 + r_{\max})^3} + \frac{200}{(1 + r_{\max})^4} + \frac{50}{(1 + r_{\max})^5}$$

Usando Excel si ottiene: $r_{\max}$= 33%.

Se l'impresa può procurarsi denaro a meno del 33%, l'investimento porta a un profitto netto.

Se l'impresa si auto-finanzia, il rendimento è del 33%.

Valore attuale di una rendita perpetua

Poc'anzi abbiamo visto che :

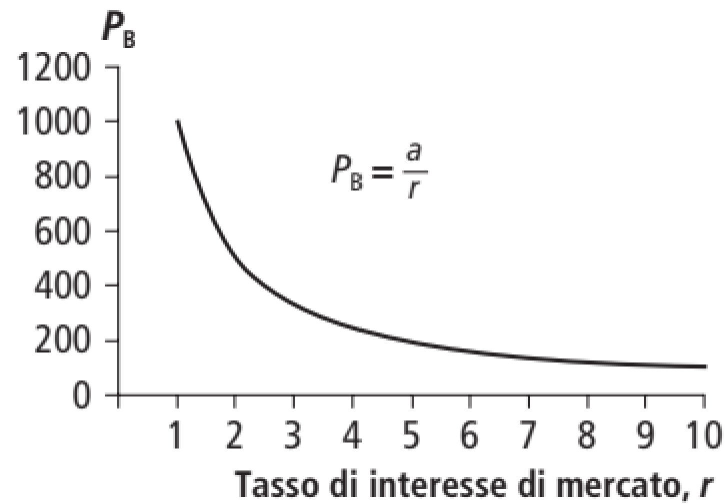
$$VA = \frac{a}{(1+r)} + \frac{a}{(1+r)^2} + \frac{a}{(1+r)^3} + \dots + \frac{a}{(1+r)^n}$$

E abbiamo trovato $VA = \frac{a}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right)$

Si ha un sotto-caso quando *n* tende a infinito.

In tal caso $\frac{1}{(1+r)^n}$ tende a zero e $VA = \frac{a}{r}$ (Regola 10.10)

Figura 10.3 Relazione tra il prezzo di un'obbligazione perpetua e il tasso di interesse di mercato, data la cedola a



La cedola a è fissa, perciò il prezzo di mercato di un'obbligazione perpetua, P_B, e il tasso di interesse di mercato, r, sono inversamente proporzionali.

Rendimento di riscatto di un'obbligazione a termine (1)

Nei mercati finanziari, gli investitori devono decidere se comprare l'obbligazione A o l'obbligazione B, ciascuna con una cedola, un valore nominale, una data di riscatto e un prezzo di mercato.
Questa decisione è molto simile alla scelta fra due investimenti e viene risolta allo stesso modo: confrontando i TIR.

Esempio: obbligazione con prezzo di mercato 130, cedola 10/anno per 5 anni, riscatto per 100 dopo 5 anni.

Rendimento di riscatto di un'obbligazione a termine (2)

Usando la Regola 10.10 (formula TIR):

$$130 = \frac{10}{(1+r)} + \frac{10}{(1+r)^2} + \frac{10}{(1+r)^3} + \frac{10}{(1+r)^4} + \frac{110}{(1+r)^5}$$

Con Excel si trova r = 3,38%.

Questo è il TIR, eccetto per il fatto che in economia finanziaria viene chiamato **rendimento di riscatto** o **rendimento a scadenza**.

Interpretazione: se compri e detieni questo titolo sino a scadenza, il rendimento totale sarà lo stesso di un investimento di 130 euro for 5 anni al tasso del 3,38%/anno.

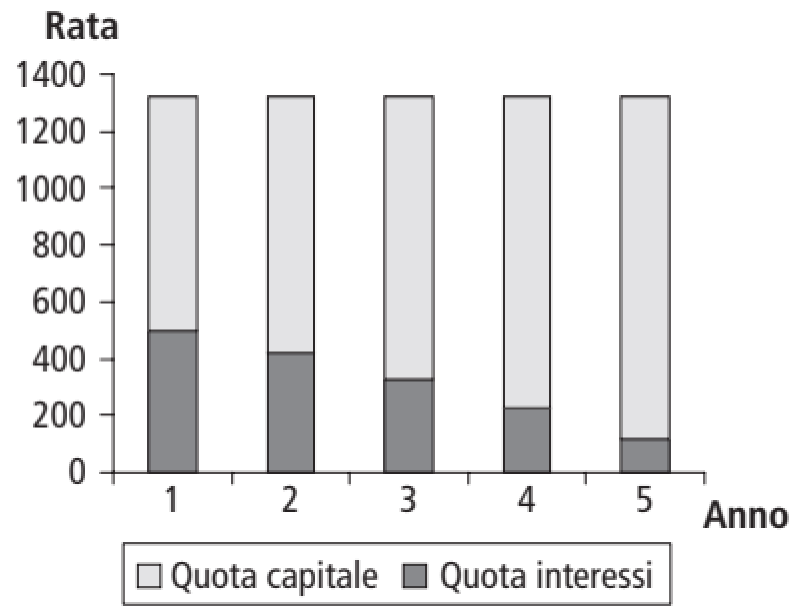
Calcolo del rimborso di un prestito

Quando si prende a prestito del denaro per comprare un'auto o una casa, in genere si concorda il rimborso a rate costanti, comprensive di quote capitale e quote interessi.
Il calcolo delle rate necessarie non è semplice perché la quota interessi diminuisce man mano che il debito viene ripagato (Paragrafo 10.13).

La formula è: $P_1 = K\left[\frac{r}{(1+r)^x - 1}\right]$ (Regola 10.11)

dove P_1 = quota capitale della prima rata; K = capitale prestato; $100r$ = tasso di interesse percentuale periodale; x = numero di periodi di rimborso (anni o mesi).
L'ammontare di ogni rata è allora $P_1 + rK$.

Figura 10.4 Struttura delle rate del piano di rimborso



Calcolo di una rendita

Quando un individuo versa una somma forfettaria a un ente in cambio del diritto a ricevere pagamenti annuali (una pensione integrativa, per esempio) sino a che è in vita, si parla di rendita perpetua.

Dal punto di vista dell'ente erogatore ciò è esattamente analogo al prestito con rimborso periodico, perciò si può usare la Regola 10.12 per calcolare la pensione dati la somma forfettaria versata, il tasso di interesse corrente e il numero di anni che costituiscono l'aspettativa di vita.