Corso di Laurea in Ingegneria dell'informazione

1ª Prova di esonero dalla prova scritta di Analisi Mat. 1 (A-L)

del 17/12/2018

1) Determinare il dominio delle seguenti funzioni

a) $y=\sqrt{\log\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}}$ b) $y=\dfrac{\sqrt{\log\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}}}{[\arccos(x-4)]^{4x}}$

2) Studiare la seguente funzione

$$y=(x+1)\,e^{\frac{x}{x-1}}$$

e tracciarne il grafico

3) Verificare se la funzione

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\operatorname{sen}3x}-1}{x} & \text{per } x>0\\[4pt] \log\dfrac{2}{3} & \text{per } x=0\\[4pt] \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{5x+2}{x^2-x}} & \text{per } x<0\end{cases}$$

è continua per $x=0$; in caso negativo puntualizzare di che tipo di discontinuità si tratta.

4) Usando la formula di Mac-Laurin calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{x^2}{2}\right)-\frac{x^2}{2}}{e^{x^4}-1}$

5) Calcolare: a) $\displaystyle\int\frac{\log(1+x)}{2x^2}\,dx$

b) Dopo aver verificato che esiste, calcolare $\displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\frac{(\operatorname{arcsen}x)^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

6) Studiare il carattere della seguente serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^6}$$

Tempo 2h e mezza per prova intera, 1h e 45 per esonero parz. (es 1, 2, 3, 4)

- Il corretto svolgimento dell'es. 1, obbligatorio per tutti, è condizione indispensabile per il superam. di eventuali OFA
- Al fine di superare la prova intera di esonero occorre aver conseguito un punteggio $\geq 18/30$ ed aver eseguito correttamente almeno uno degli esercizi 5a) e 5b)

Prima prova di esonero dalla prova scritta di Analisi Mat. 1 (A-L) del 17/12/2018 Pag 1

1)

a)
$$\begin{cases}\log\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}\geq 0\\[2mm] \dfrac{x-2}{x^2-5x+6}>0\\[2mm] x^2-5x+6\neq 0\end{cases} \xrightarrow{\text{superflua}} \begin{cases}\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}\geq 1 \ (*)\\[2mm] x^2-5x+6\neq 0\end{cases} \to \begin{cases}\dfrac{-x^2+6x-8}{x^2-5x+6}\geq 0\\[2mm] x^2-5x+6\neq 0\end{cases} \Rightarrow D=(3,4]$$

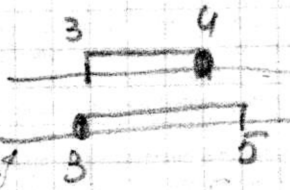
$$(*)\ \frac{x-2}{x^2-5x+6}-1\geq 0 \Rightarrow \frac{x-2-x^2+5x-6}{x^2-5x+6}\geq 0 \Rightarrow \frac{-x^2+6x-8}{x^2-5x+6}\geq 0$$

$$\begin{cases}-x^2+6x-8\geq 0\\ x^2-5x+6>0\end{cases} \vee \begin{cases}-x^2+6x-8\leq 0\\ x^2-5x+6<0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}x^2-6x+8\leq 0\\ x^2-5x+6>0\end{cases} \begin{cases}2\leq x\leq 4\\ x<2 \vee x>3\end{cases} \Rightarrow 3<x\leq 4$$

$$\vee \begin{cases}x^2-6x+8\geq 0\\ x^2-5x+6<0\end{cases} \begin{cases}x\leq 2 \vee x\geq 4\\ 2<x<3\end{cases} \quad \emptyset$$

b)
$$\begin{cases}\log\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}\geq 0\\[2mm] \dfrac{x-2}{x^2-5x+6}>0\\[2mm] x^2-5x+6\neq 0\\ -1\leq x-4\leq 1\\ \arccos(x-4)>0\end{cases} \to \begin{cases}3<x\leq 4\\ 3\leq x\leq 5\\ x-4\neq 1 \Rightarrow x\neq 5\end{cases}$$



$3<x\leq 4 \quad D=(3,4]$

3)
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2^{\operatorname{sen}3x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2^{\operatorname{sen}3x}-1}{\operatorname{sen}3x}\cdot\frac{\operatorname{sen}3x}{3x}\cdot 3 = 3\log 2=\log 8$$

$\to 1$ per lim notevole $\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}y}{y}$ con $y=3x$

$\Rightarrow \log 2$ per il lim notevole $\lim_{y\to 0}\frac{2^y-1}{y}$ con $y=\operatorname{sen}3x$

$$f(0)=\log\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{5x+2}{x^2-x}}=0$$

$5x+2\to 2$, $x^2-x\to 0^+$, $\frac{5x+2}{x^2-x}\to+\infty$

$x^2-x>0$ per $x<0 \vee x>1$ $\quad + + \ \underset{0}{|}\ - - \ \underset{1}{|}\ + +$

La nostra funzione ha dunque una discontinuità di prima specie.

4) Poiché $\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2) \Rightarrow \log\left(1+\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)$

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2) \Rightarrow e^{x^4}=1+x^4+o(x^4)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{x^2}{2}\right)-\frac{x^2}{2}}{e^{x^4}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\frac{x^2}{2}}-\frac{x^4}{8}+\cancel{o(x^4)}-\cancel{\frac{x^2}{2}}}{\cancel{1}+x^4+\cancel{o(x^4)}-\cancel{1}}=-\frac{1}{8}$$

P.S.I. P.S.I.

6) La serie non è una serie a t. positivi pertanto occorrerà studiarne l'assoluta convergenza. Alla serie dei val. ass $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n}{n^6}\right|$ possiamo applicare il criterio del confronto. Poiché $\frac{|\cos n|}{n^6}<\frac{1}{n^6}$, termine generale della s. armonica gen. con $\alpha=6>1$ che è convergente, anche la ns serie è ass. c. e quindi per il teorema sulla serie a.c. è convergente.

[redacted]

1) $y = (x+1)\, e^{\frac{x}{x-1}}$; $x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow D = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

no:

$y > 0 \iff (x+1) > 0 \iff x > -1$

assi:

$\begin{cases} x = 0 \\ y = (x+1)\, e^{\frac{x}{x-1}} \end{cases}$ $(0,1)$ (int. asse y) ; $\begin{cases} y = 0 \\ y = (x+1)\, e^{\frac{x}{x-1}} \end{cases} \iff (x+1) = 0 \quad x = -1$; $(-1, 0)$ (int. asse x)

$\lim_{x \to -\infty} \underbrace{(x+1)}_{\to -\infty} e^{\overbrace{\frac{x}{x-1}}^{\to 1} \to e} = -\infty$ verifica ma A.O. ; $\lim_{x \to +\infty} \underbrace{(x+1)}_{\to +\infty} e^{\overbrace{\frac{x}{x-1}}^{\to 1} \to e} = +\infty$ $\left(\frac{1}{2}P\right)$

$\lim_{x \to 1^-} \underbrace{(x+1)}_{\to 2} e^{\frac{x \to 1}{x-1 \to 0^-} \to -\infty} \to 0 = 0$, $\lim_{x \to 1^+} (x+1)\, e^{\frac{x}{x-1 \to 0^+} \to +\infty} \to +\infty = +\infty$ ($x = 1$ A.V. a dx)

$x-1 > 0$ per $x > 1$ $\quad$ - - - - $\overset{1}{|}$ + + + + +

Verifichiamo l'esist. degli asintoti obliqui:

$\lim_{x \to -\infty} \underbrace{\frac{x+1}{x}}_{\to 1} e^{\frac{x}{x-1} \to 1} \to e = e$ (coeff. ang.) ; $q = \lim_{x \to -\infty} (x+1)\, e^{\frac{x}{x-1}} - e x =$

$\lim_{x \to -\infty} x\left(e^{\frac{x}{x-1}} - e\right) + e^{\frac{x}{x-1}} = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{e^{\frac{x}{x-1}} - e}{\frac{1}{x}} + \lim_{x \to -\infty} e^{\frac{x}{x-1}} = l_1 + e$

Per calcolare l_1 applich. il T. de L'Hospital e dopo aver verificato le altre hp calcoliamo il limite del rapp. delle deriv.

$\lim_{x \to -\infty} \dfrac{e^{\frac{x}{x-1}} \cdot \frac{x-1-x}{(x-1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{\frac{x^2}{(x-1)^2}}_{\to 1} e^{\frac{x}{x-1} \to 1} \to e = e \Rightarrow q = e + e = 2e$

$\Rightarrow$ l'asintoto obliquo a $-\infty$ è $y = ex + 2e$ e si vede facilmente che è lo stesso a $+\infty$.

$y' = e^{\frac{x}{x-1}} + (x+1)\, e^{\frac{x}{x-1}} \cdot \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \frac{e^{\frac{x}{x-1}}}{(x-1)^2}\, x(x-3)$ Poiché il q.to e l'espon. sono ≥ 0

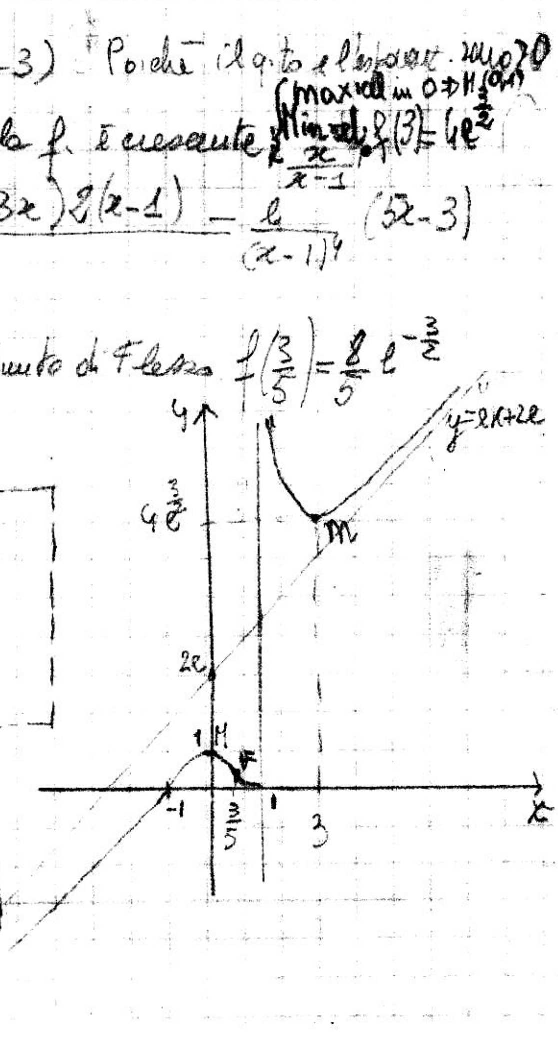
$y' > 0$ per $x < 0 \vee x > 3$ dunque per questi valori la f. è crescente $\begin{cases} \text{max rel in } 0 \Rightarrow M(0,1) \\ \text{Min rel. } f(3) = 4e^{\frac{3}{2}} \end{cases}$

$y'' = e^{\frac{x}{x-1}} \cdot \left(\frac{-1}{(x-1)^2} \cdot \frac{x(x-3)}{(x-1)^2} + \frac{(2x-3)(x-1)^2 - (x^2-3x)\, 2(x-1)}{(x-1)^4}\right) = \frac{e^{\frac{x}{x-1}}}{(x-1)^4}(5x-3)$

$y'' > 0 \iff 5x - 3 > 0 \iff x > \frac{3}{5}$

Quindi f è convessa in $\left[\frac{3}{5}, 1\right) \cup (1, +\infty)$, $\frac{3}{5}$ è un punto di flesso $f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{8}{5} e^{-\frac{3}{2}}$

$f'\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{25}{4} \cdot \left(-\frac{12}{25}\right) e^{-\frac{3}{2}} = -3\, e^{-\frac{3}{2}}$



5a) $\int \frac{\log(1+x)}{2x^2}\, dx = -\log(1+x)\frac{1}{2x} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{x}\, dx =$

p.p. $u = \log(1+x) \Rightarrow u' = \frac{1}{1+x}$

$v' = \frac{1}{2x^2} \Rightarrow v = \frac{-1}{2x}$

$-\frac{1}{2x}\log(1+x) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\, dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x}\, dx =$

$= -\frac{1}{2x}\log(1+x) + \frac{1}{2}\log|x| - \frac{1}{2}\log|1+x| + c =$

$= \log(1+x)^{-\frac{1}{2x}} + \log\sqrt{\left|\frac{x}{x+1}\right|} + c = \log\left[\sqrt{\left|\frac{x}{x+1}\right|} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+x)^{\frac{1}{x}}}}\right] + c$

Infatti $\frac{1}{x(1+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1+x} = \frac{A(1+x) + Bx}{x(1+x)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$

Si tratta di un int. improprio perché la f. integranda è disc. in -1

5b) La funzione integranda è un infinito per $x \to -1$ perché

$$\lim_{x \to -1} \frac{(\arcsin x)^3}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty$$ ed è un infinito di ordine $\frac{1}{2}$

rispetto all'infinito di confronto $\frac{1}{(1+x)}$ sempre per $x \to -1$. Infatti

$$\lim_{x \to -1} \frac{\frac{(\arcsin x)^3}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{(1+x)^{1/2}}} = \lim_{x \to -1} \frac{\frac{(\arcsin x)^3}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}}{\frac{1}{\sqrt{1+x}}} = -\frac{\pi^3}{8}\frac{\sqrt{2}}{2}$$ quindi poiché $\alpha = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$

Tot. 4,5 = $\begin{cases} 1,5 \text{ esistenza} \\ 3 \text{ calcolo} \end{cases}$

$\Rightarrow$ l'integrale esiste.

Calcoliamo una primitiva: procediamo per sostituzione ponendo $\arcsin x = t \Rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int \frac{(\arcsin x)^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int t^3\,dt = \frac{1}{4}t^4 + c = \frac{1}{4}(\arcsin x)^4 + c$$

$$\int_p^{1/2} \frac{(\arcsin x)^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{4}\left[(\arcsin x)^4\right]_p^{1/2} = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\pi}{6}\right)^4 - (\arcsin p)^4\right]$$

$$\lim_{p \to -1^+} \int_p^{1/2} \frac{(\arcsin x)^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\pi}{6}\right)^4 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)^4\right] = \frac{\pi^4}{4}\left[\frac{1}{1296} - \frac{1}{16}\right] = \frac{-\pi^4}{\cancel{4}} \cdot \frac{\overset{20}{\cancel{80}}}{1296} = \frac{-\pi^4 5}{324}$$