Corso di laurea in Ingegneria dell'Informazione

Corso di Analisi Matematica 2

Prova scritta del 9/06/2019

1) Calcolare il volume della porzione di spazio compresa nel 1° ottante fra il cono di equazione $z^2 = x^2 + y^2$ e la sfera di equazione $x^2+y^2+z^2=4$

2) Calcolare: a) $\int_\Gamma \sqrt{4x^2+4y^2}\, ds$ dove Γ è la curva piana di equazioni $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \operatorname{sen} t \end{cases}$ con $t \in [0, 2\pi]$.

3) a) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y(x+y+1)\,dx + (2y+x)\,dy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

b) Determinare il valore $\oint_\Gamma e^x(xy+y^2+y)\,dx + e^x(2y+x)\,dx$ ove Γ è l'ellisse di centro l'origine e di semiassi 3 e 2, motivando la risposta sulla base dei teoremi studiati.

4) Assegnata la successione di funzioni $f_n(x) = 2 - x\left(\sqrt{3n} - \sqrt{3n+3}\right)$ $\forall x \in [0,1]$ verificare se essa è convergente puntualmente e se lo è uniformemente.

5) Determinare lo sviluppo in serie di Fourier della seguente funzione ed indicare se è convergente e se e dove è uniformemente convergente, giustificando la risposta:

$$f(x) = 1 - \frac{2|x|}{\pi} \quad \text{se } x \in [-\pi, \pi]$$

6) Assegnata la funzione

$$f(x,y) = x^4 + y^3 - 4x^2 - 3y^2$$

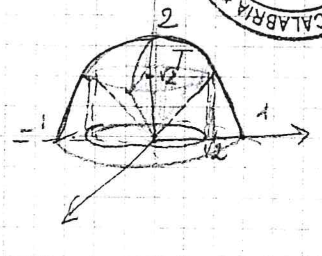
a) determinare gli eventuali punti di max e min relativo della funzione

b) Individuare la direzione di massima variazione di f nel punto $(1,1)$

Tempo 2h e mezza

Prova scritta di Analisi Matematica 2 del 4/06/19

1) Per determinare il volume possiamo calcolare l'integrale triplo della funzione unitaria, che calcoleremo per fili - Determiniamo l'intersezione delle due superfici



$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ z^2=x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow 2z^2=4 \Rightarrow z=\sqrt{2} \text{ (quota interс. cono e sfera)}$$

per determin. il raggio della circonf. intersezione osserviamo che essa è posta a quota $\sqrt{2}$ e appartiene al cono $x^2+y^2=z^2$, quindi la sua eq. sarà $x^2+y^2=2 \Rightarrow r=\sqrt{2}$

$$\Rightarrow V=\iiint_T dx\,dy\,dz=\iint_B dx\,dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\vartheta\int_0^{\sqrt{2}}\left[\sqrt{4-\rho^2}-\rho\right]\rho\,d\rho=\frac{\pi}{2}\left\{\left[-\frac{8}{3}\left(1-\frac{\rho^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{2}}-\left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^{\sqrt{2}}\right\}=\frac{\pi}{2}\left[\frac{8}{3}-\frac{1}{3}2^{\frac{5}{2}}\right]$$

Infatti $\int\rho\sqrt{4-\rho^2}\,d\rho=-8\int \operatorname{sen}^2 t\cos t\,dt=-8\int p^2\,dp=-\frac{8}{3}p^3+c=-\frac{8}{3}\operatorname{sen}^3 t+c=-\frac{8}{3}\left(1-\frac{\rho^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$

$p=\operatorname{sen} t \Rightarrow dp=\cos t\,dt$

sost. $\rho=2\cos t \Rightarrow d\rho=-2\operatorname{sen} t\,dt \Rightarrow \cos t=\frac{\rho}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} t=\sqrt{1-\frac{\rho^2}{4}}$

2) La nostra curva è un arco di curva semplice regolare, perché $x(t)$ e $y(t)\in C^1([0,2\pi])$ in quanto prodotti di funzioni di classe $C^1([0,2\pi])$ e inoltre, essendo $\begin{cases} x'(t)=e^t(\cos t-\operatorname{sen} t) \\ y'(t)=e^t(\operatorname{sen} t+\cos t) \end{cases} \Rightarrow$

$[x'(t)]^2+[y'(t)]^2=2e^{2t}>0$ - Possiamo allora calcolare:

$$I=\int_0^{2\pi}\sqrt{4e^{2t}(\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t)}\cdot\sqrt{2}\,e^t\,dt=2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}e^{2t}\,dt=\frac{2\sqrt{2}}{2}\int_0^{4\pi}e^p\,dp=\sqrt{2}\left(e^{4\pi}-1\right)$$

$2t=p \Rightarrow dt=\frac{1}{2}dp$

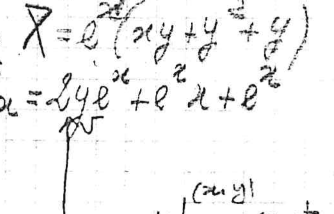
3)a) L'equazione associata al problema non è una eq. diff. esatta, perché pur essendo $X=y(x+y+1)$ e $Y=(2y+x)$ di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ si ha $X_y=x+2y+1\neq$ $\neq Y_x=1$ - Possiamo allora provare a determinare il fattore integrante valutando prima se dipende dalla x. Poiché $\frac{X_y-Y_x}{Y}=\frac{(x+2y+1)-1}{x+2y}=1$

Il fattore integrante sarà $\mu(x)=e^{\int dx}=e^x$

La nostra equazione diventa allora: $e^x(xy+y^2+y)\,dx+e^x(2y+x)\,dy=0$

che adesso si può facilmente verificare essere esatta, in quanto $\bar{X}=e^x(xy+y^2+y)$ e $\bar{Y}=e^x(2y+x)\in C^1(\mathbb{R}^2)$ e inoltre $\bar{X}_y=e^x(x+2y+1)=\bar{Y}_x=2ye^x+e^x x+e^x$

Per calcolare la f. integrale, integriamo la f.d.e. lungo la spezzata $\Gamma_1+\Gamma_2$



$$F(x,y)=\int_0^x e^u\cdot 0\,du+\int_0^y e^x(2v+x)\,dv+c_1=\left[e^x v^2+e^x x v\right]_0^y+c_1=e^x y(y+x)+c_1$$

L'integrale generale sarà $e^x y(y+x)=c$, imponendo $y(0)=1$

$\Rightarrow c=1$, quindi la sol. del nostro problema di Cauchy sarà $e^x(y^2+yx)=1$

3b) Quell'integrale vale zero in quanto si tratta dell'integrale di una f.d.e. su una curva chiusa e il teorema c.n.s. sui diff. esatti afferma questo -

4) Fissata una $x \in (0,1]$

$$\lim_{n\to\infty}\left[2 - x\left(\sqrt{3n}-\sqrt{3n+3}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[2 - \frac{x\left(\sqrt{3n}-\sqrt{3n+3}\right)\left(\sqrt{3n}+\sqrt{3n+3}\right)}{\sqrt{3n}+\sqrt{3n+3}}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[2 - x\underbrace{\frac{(-3)}{\sqrt{3n}+\sqrt{3n+3}}}_{\to 0}\right] = 2$$

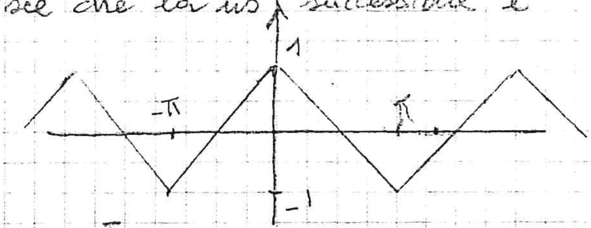
Per $x=0$ $\lim_{n\to\infty}\left[2 - x\left(\sqrt{3n}-\sqrt{3n+3}\right)\right] = 2$, quindi la n s successione converge puntualmente a $f(x)=2$ $\forall x \in [0,1]$

Calcoliamo ora $M_n = \max_{[0,1]} \left|f_n(x) - f(x)\right| = \max_{[0,1]} \left|x\left(\sqrt{3n}-\sqrt{3n+3}\right)\right| =$

$= \left|\sqrt{3n}-\sqrt{3n+3}\right|$ e poi facciamo $\lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty}\left|\sqrt{3n}-\sqrt{3n+3}\right| = 0$

per quanto sopra. Per il criterio c.n.s questo garantisce che la n s successione è unif. convergente.

5) La funzione f è una funzione pari;



$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi}\left[1 - \frac{2|x|}{\pi}\right]dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{0}\left[1+\frac{2x}{\pi}\right]dx + \int_{0}^{\pi}\left[1-\frac{2x}{\pi}\right]dx = \left[x + \frac{2x^2}{2\pi}\right]_{-\pi}^{0} + \left[x - \frac{2x^2}{2\pi}\right]_{0}^{\pi} = -\pi + \pi + \pi - \pi = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)\cos nx \, dx = \cancel{\frac{2\pi}{n}\left[+\operatorname{sen} nx\right]_0^{\pi}} - \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi} x\cos nx = -\frac{4}{\pi^2}\left[\left[\frac{x}{n}\operatorname{sen} nx\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen} nx}{n}dx\right] =$$

$$= -\frac{4}{n^2\pi^2}\left[\cos nx\right]_0^{\pi} = -\frac{4}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \dfrac{8}{n^2\pi^2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

$b_n = 0$ $\forall n$ perché f è pari. Dunque la s. di Fourier sarà

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{\pi^2(2k+1)^2}\cos((2k+1)x)$$

Poiché f è continua in tutto $\mathbb{R}$ la serie converge a $f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, essendo inoltre la funzione regolare a tratti la s. di F. converge uniformemente in ogni int $[a,b] \subset \mathbb{R}$

6) a) $\begin{cases} f'_x = 4x^3 - 8x = 0 \\ f'_y(x,y) = 3y^2 - 6y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x(x^2-2) = 0 \\ 3y(y-2) = 0 \end{cases}$

$f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ $P_1(0,0)$

$\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$ $P_2(0,2)$

$\begin{cases} x=\pm\sqrt{2} \\ y=2 \end{cases}$ $P_3=(-\sqrt{2},2)$ $P_4=(\sqrt{2},2)$

$\begin{cases} x=\pm\sqrt{2} \\ y=0 \end{cases}$ $P_5=(-\sqrt{2},0)$ $P_6=(\sqrt{2},0)$

punti estremali

$f''_{xx} = 12x^2 - 8$

$f''_{xy} = 0$

$f''_{yy} = 6y - 6$

$H(0,0) = 48 > 0$ $f''_{xx}(0,0) = -8 < 0$ $\Rightarrow P_1(0,0)$ p.to di max rel.

$H(0,2) = -48 < 0$; $H(\pm\sqrt{2},2) = 96 > 0$ $f''_{xx}(\pm\sqrt{2},2) = 16 > 0 \Rightarrow P_3$ e P_4 sono punti di min rel.

$H(\pm\sqrt{2},0) = -96 < 0$;

b) La direzione di massima variazione della funzione è quella del grad f che nel punto (1,1) è il vettore $\underline{v} \equiv (-4,-3)$ (1,5 P)