Corso di laurea in Ingegneria dell'Informazione
Prova scritta di Analisi 2
13/09/2019

1) Calcolare
$$\iiint_T \left[x^2+y^2+(9-2z)\right]\,dx\,dy\,dz$$
dove T è il solido contenuto nel primo ottante racchiuso dal cilindro $x^2+y^2=1$ e limitato superiormente dal paraboloide $z=x^2+y^2+2$.

2) Calcolare
$$\int_\Gamma \frac{x}{y}\,ds$$
dove Γ è l'arco di curva di equazioni parametriche $\begin{cases} x=e^{3t} \\ y=e^{9t}\end{cases}$ $t\in[0,1]$

3) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:
$$(y^2e^x+\cos x)\,dx+(2ye^x-ye^y)\,dy=0$$

4) Determinare: a) la funzione integrale della forma differenziale che si trova al primo membro della precedente equazione
b) Il valore dell'integrale curvilineo della stessa lungo l'arco di parabola $y=x^2$ fra i punti $O\equiv(0,0)$ e $P\equiv(1,1)$
c) Il valore dell'integrale curvilineo della stessa lungo la circonferenza di centro l'origine e raggio 2
Giustificare tutte le risposte date facendo riferimento ai teoremi studiati.

5) Sia $l>0$ fissato, si consideri la funzione "a dente di sega" $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita come: $f(x)=x$ per $x\in\,]-l,l[$, $f(kl)=0$ per $k\in\mathbb{Z}$ prolungata per periodicità $2l$. Tracciarne il grafico e scrivere la serie di Fourier ad essa relativa puntualizzando dove e come converge ad f.

6) Risolvere il seguente problema di Cauchy: $\begin{cases} y'=4xy+x^3 \\ y(0)=1\end{cases}$

7) Considerata la funzione $f(x,y)=\operatorname{sen}(x^2y)+x-3y^2$
a) determinare qual è la direzione di massima variazione della stessa nel punto $(1,\pi)$, motivando la risposta data con riferimenti teorici.
Calcolare b) il grad f nello stesso punto, c) la derivata direzionale nel punto $(1,\pi)$ secondo la direzione che forma un angolo $\alpha=\frac{\pi}{6}$ con il semiasse $x>0$.

Tempo 2h e mezza.

Prova scritta di Analisi 2 del 13/09/2019

1) Dobbiamo risolvere l'integrale per fili tenendo presente che dai dati

$$I=\iiint_T [x^2+y^2+(9-2z)]\,dx\,dy\,dz = \iint_B dx\,dy \int_0^{2+x^2+y^2} [x^2+y^2+(9-2z)]\,dz =$$

$$= \iint_B \left[x^2z+y^2z+9z-z^2\right]_0^{2+x^2+y^2} dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^1 \left(\rho^3 z+9\rho z-\rho z^2\right)_0^{2+\rho^2} d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^1 (14\rho+7\rho^3)\,d\rho =$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{35}{4}\right)d\vartheta = \frac{35}{8}\pi$$

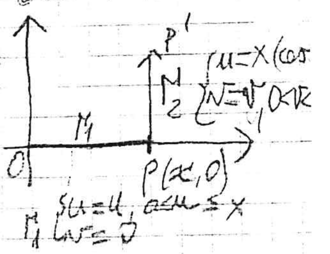
2) Si tratta di un int. curvil. su un arco di curva semplice regolare; dalle eq. parametriche della curva $\Rightarrow x'(t)=3e^{3t}$; $y'(t)=4e^{4t} \Rightarrow$

$$I=\int_\gamma \frac{x}{y}\,ds = \int_0^1 \frac{1}{e^t}\, e^{3t}\sqrt{9+16e^{2t}}\,dt = \int_0^1 e^{2t}\sqrt{9+16e^{2t}}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^{e^2}\sqrt{16u+9}\,du =$$

sost. $e^{2t}=u \Rightarrow 2e^{2t}\,dt=du$

$$=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{2}{48}\left[(16u+9)^{\frac{3}{2}}\right]_1^{e^2} = \frac{\sqrt{(16e^2+9)^3}-(27)^{\frac{3}{2}}}{48}$$

3) L'eq. differenziale è una eq. diff. esatta in quanto posto $X=y^2e^x+\cos x$ e $Y=2ye^x-ye^y$, si ha che $X, Y \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e inoltre $X_y=2ye^x=Y_x$ essendo $\mathbb{R}^2$ un rett. aperto. Per trovare l'int. generale conviene determinare la f. integrale ed a questo scopo integriamo lungo la spezzata OPP'



$$F(x,y)=\int_0^x(0\cdot e^u+\cos u)\,du+\int_0^y(2ve^x-ve^v)\,dv=\left[\operatorname{sen}u\right]_0^x+$$

$$+\left[v^2e^x+e^v(1-v)\right]_0^y=\operatorname{sen}x+y^2e^x+e^y(1-y)-1$$

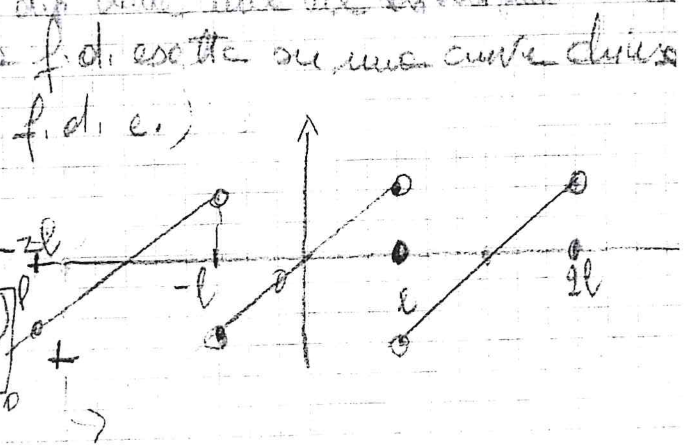
L'int. generale sarà allora $\operatorname{sen}x+y^2e^x+e^y(1-y)-1=C$

4) a) Determinata nel quesito n°3

b) Il valore si può calcolare, calcolando $F(1,1)-F(0,0)=\operatorname{sen}1+e-1$ per i teoremi sulle f. di e. (2°) (L'int. infatti non dip. dalla curva ma solo dai punti estremi)

c) Trattandosi di un int. curvilineo di una f. di esatta su una curva chiusa l'int. vale zero. (cfr. Th. CNS per una f. di e.)

5) Si tratta di una funzione dispari $\forall n$ dunque $a_n=0$ – $T=2\ell$



$$b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^\ell x\,\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{\ell} = \frac{2}{\ell}\left[\frac{-x\cos(n\pi x/\ell)}{n\pi/\ell}\right]_0^\ell +$$

per parti

$$+\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\frac{\cos(n\pi x/\ell)}{n\pi/\ell}\,dx = \frac{2(-1)^{n+1}\ell}{n\pi} + \frac{2}{\ell}\left[\frac{\text{sen}(n\pi x/\ell)}{(n\pi/\ell)^2}\right]_0^{\ell} = \frac{2(-1)^{n+1}\ell}{n\pi}$$ Pag 2

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2\ell}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

La serie converge eq. in ogni int $[a,b] \subset (-\ell,\ell)$ o anche in ogni int $[a,b] \subset$ in ogni int. in cui la f è continua

5) a) La funzione è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e pertanto $\exists$ grad f; la direzione di massima variazione è quella del gradiente perché, dal teorema sulla derivata direzionale si ha che la derivata direzionale della funzione nella direzione del gradiente è massima essendo il gradiente $\perp$ alle linee di livello

b) Calcoliamo dunque: $f'_x(x,y) = 2xy\cos^2(x^2y) + 1$ e $f'_y(x,y) = x^2\cos(x^2y) - 6y$

$\text{grad} f(x,y) = (f'_x(x,y), f'_y(x,y)) \Rightarrow \text{grad} f(1,\pi) = (1-2\pi, -1-6\pi)$

c) $\frac{df}{dr}(1,\pi) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,\pi)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}(1,\pi)\cdot\frac{1}{2} = (1-2\pi)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + (-1-6\pi)\cdot\frac{1}{2}$

6) È un p.d.C. associato ad un'eq. diff lineare del 1° ordine – Determiniamone l'int generale: $y' - 4xy = x^3$

Calcoliamo $\int 4x\,dx = 2x^2 \Rightarrow e^{-2x^2}(y' - 4xy) = e^{-2x^2}x^3 \Rightarrow \int D(y\cdot e^{-2x^2}) =$

$= \int e^{-2x^2}x^3\,dx + c \underset{\text{per parti}}{=} -\frac{1}{8}e^{-2x^2}(1+2x^2) + c \Rightarrow y = ce^{2x^2} - \frac{1+2x^2}{8}$

$y(0) = c - \frac{1}{8} = 1 \Rightarrow \quad c = \frac{9}{8} \Rightarrow$ la sol. del p.d.C è $y = \frac{9}{8}e^{2x^2} - \frac{(1+2x^2)}{8}$