Ingegneria dell'Informazione
Compito di Calcolo delle Probabilità
15 Giugno 2018

Durata della prova: 2 ore e trenta minuti

QUESITO TEORICO

Presentare i concetti di variabile aleatoria e funzione di distribuzione. Dopo aver classificato le variabili aleatorie in discrete e assolutamente continue, definire densità discreta, densità di probabilità, valor medio e varianza. Fornire un esempio di variabile aleatoria discreta e uno di variabile aleatoria assolutamente continua, riportandone anche media e varianza.

Esercizio 1

Data la variabile aleatoria normale X di parametri $\mu=20$ e $\sigma^2=25$, si calcoli

a) $P(X>26.1)$;
b) $P(X<16)$;
c) $P(18<X<21)$.

Esercizio 2

Due scatole A e B, all'apparenza indistinguibili, contengono palline di diverso colore. In particolare la scatola A contiene 10 palline gialle, 8 palline bianche e 6 palline nere; nella B si trovano 5 palline gialle, 6 palline bianche e 12 palline nere. Si sceglie a caso una delle due scatole e si pesca da essa una pallina.

a) Qual è la probabilità che la pallina pescata sia bianca?
b) Sapendo che la pallina pescata è bianca, qual è la probabilità di aver scelto la scatola B?

Esercizio 3

Si consideri

$$f(x,y)=\begin{cases} c\left(x^2+y^2\right) & se\ 2\le x\le 3,\ 2\le y\le 3 \\ 0 & altrove. \end{cases}$$

a) Determinare c affinché $f(x,y)$ risulti la densità di probabilità di una variabile aleatoria doppia assolutamente continua (X,Y).
b) Calcolare le densità marginali.
c) Calcolare $P(X\le 2.5)$.
d) X e Y sono indipendenti?

Compito di Calcolo delle Probabilità
15/06/2018

Esercizio 1

$$X \sim N(20,25) \Rightarrow \frac{X-20}{5} = Z \sim N(0,1)$$

a) $P(X > 26,1) = P\left(\frac{X-20}{5} > \frac{26,1-20}{5}\right) =$

$= P(Z > 1,22) = 1 - P(Z \leq 1,22) = 1 - 0,888 = 0,112$

b) $P(X < 16) = P\left(\frac{X-20}{5} < -\frac{4}{5}\right) =$

$= P(Z < -0,8) = P(Z > 0,8) = 1 - P(Z \leq 0,8) =$

$= 1 - 0,7881 = 0,2119$

c) $P(18 < X < 21) = P\left(\frac{18-20}{5} < \frac{X-20}{5} < \frac{21-20}{5}\right)$

$= P\left(-\frac{2}{5} < Z < 1/5\right) = P\left(Z < \frac{1}{5}\right) - P\left(Z < -\frac{2}{5}\right) =$

$= P(Z < 0,2) - P(Z > 0,4) =$

$= P(Z < 0,2) - 1 + P(Z > 0,4) = 0,5793 - 1 + 0,6554 =$

$= 0,2347$

Esercizio 2

A	B
10 G	5 G
8 B	6 B
6 N	12 N

$E_1 = \{$ si sceglie la scatola A $\}$ $P(E_1) = 1/2$

$E_2 = \{$ si sceglie la scatola B $\}$ $P(E_2) = 1/2$

E_1 e E_2 sono alternative

$E = \{$ si pesca pallina bianca $\}$

$$P(E) = P(E/E_1) \cdot P(E_1) + P(E/E_2) P(E_2) =$$

$$= \frac{\cancel{8}^{1}}{\cancel{24}_{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{6}{23} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} + \frac{6}{23}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{23+18}{69} = \frac{41}{138}$$

$$P(E_2|E) = \frac{P(E/E_2) \cdot P(E_2)}{P(E)} =$$

$$= \frac{\frac{\cancel{6}}{23} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}}{\frac{29}{138}} = \frac{3}{\cancel{23}} \frac{\cancel{138}^{6}}{41} = \frac{18}{41}$$

Esercizio 3

$$f(x,y) = \begin{cases} c\,(x^2+y^2) & \text{se } 2 \le x \le 3,\ 2 \le y \le 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) $f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \iff \underline{c \geq 0}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1 \iff$$

$$\Leftrightarrow 1 = c\int_2^3 \int_2^3 (x^2+y^2)\,dx\,dy = c\int_2^3 \left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]_2^3 dx =$$

$$= c\int_2^3 \left(3x^2 - 2x^2 + \frac{27}{3} - \frac{8}{3}\right)dx = c\int_2^3 \left(x^2 + \frac{19}{3}\right)dx =$$

$$= c\left[\frac{x^3}{3} + \frac{19}{3}x\right]_2^3 = \frac{c}{3}\left[27 - 8 + 57 - 38\right]$$

$$= c\,\frac{38}{3}$$

$$c\,\frac{38}{3} = 1 \Leftrightarrow c = \frac{3}{38}$$

b) $f_X(x) = 0$ se $x < 2$; $x > 3$

Se $2 \le x \le 3$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \frac{3}{38}\int_2^3 (x^2+y^2)\,dy =$$

$$= \frac{3}{38}\left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]_2^3 = \frac{3}{38}\left[x^2 + \frac{19}{3}\right]$$

$$= \frac{3}{38}x^2 + \frac{1}{2}$$

ovvero $f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{38}x^2 + \frac{1}{2} & 2 \le x \le 3 \\ 0 & x < 2;\ x > 3 \end{cases}$

$f_Y(y) = 0 \qquad$ se $y < 2, y > 3$

Per $\quad 2 \le y \le 3$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \frac{3}{38}\int_2^3 (x^2 + y^2)\,dx =$$

$$= \frac{3}{38}\left[\frac{x^3}{3} + y^2 x\right]_2^3 = \frac{3}{38}\left[\frac{19}{3} + y^2\right] = \frac{1}{2} + \frac{3}{38}y^2$$

ovvero

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{3}{38}y^2 & 2 \le y \le 3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

c) $$P(X \le 2.5) = \int_{-\infty}^{2,5} f_X(x)\,dx =$$

$$= \int_2^{2,5}\left(\frac{3}{38}x^2 + \frac{1}{2}\right)dx = \frac{3}{38}\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^{2,5} + \frac{1}{2}\left[x\right]_2^{2,5} =$$

$$= \frac{1}{38}\left[\left(\frac{5}{2}\right)^3 - 8\right] + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{38}\left[\frac{125}{8} - 8\right] + \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{61}{304} + \frac{1}{4} = \frac{137}{304} = 0,45$$

d) Poiché $\quad f(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$

$\Rightarrow$ X e Y non sono indipendenti