Corso di Analisi Matematica 1 (A-L)

Prova del 15/12/2020

1) a) $\begin{cases} \dfrac{-x^2+5x}{x^2-5x+6} > 0 \\ x^2-5x+6 \neq 0 \end{cases}$ (i) $0<x<2 \vee 3<x<5$ $\quad D_1=(0,2)\cup(3,5)$

(i) $\dfrac{-x^2+5x}{x^2-5x+6} > 0 \to \begin{cases} -x^2+5x>0 \\ x^2-5x+6>0 \end{cases} \begin{cases} x^2-5x<0 \\ x<2 \vee x>3 \end{cases} \begin{cases} 0<x<5 \\ x<2 \vee x>3 \end{cases}$

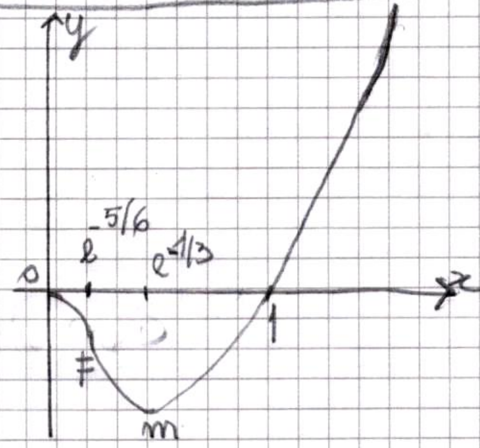
$\vee \begin{cases} -x^2+5x<0 \\ x^2-5x+6<0 \end{cases} \begin{cases} x^2-5x>0 \\ 2<x<3 \end{cases} \begin{cases} x<0 \vee x>5 \\ 2<x<3 \end{cases}$ $\quad \emptyset$

$0<x<2$
$\vee 3<x<5$

b) $\begin{cases} \arccos \frac{x}{5} > 0 \\ -1 \le \frac{x}{5} \le 1 \end{cases} \begin{cases} \frac{x}{5} \neq 1 \\ -5 \le x \le 5 \end{cases}$ $\quad -5 \le x < 5$ $\quad D_2 = [-5, 5)$

c) $\begin{cases} 0<x<2 \vee 3<x<5 \\ -5 \le x < 5 \end{cases}$ $\quad 0<x<2 \vee 3<x<5$ $\quad D_3=(0,2)\cup(3,5)$

2) $y = x^3 \log x$ $\quad D=(0,+\infty)$



$f(x)>0$ $\begin{cases} x>0 \\ \log x>0 \end{cases} \begin{cases} x>0 \\ x>1 \end{cases}$ $\quad x>1$

$\vee \cancel{\begin{cases} x<0 \\ \log x<0 \end{cases}} \nexists$

Int asse x $\begin{cases} y=0 \\ y=x^3\log x \end{cases} \begin{cases} y=0 \\ x^3 \log x=0 \end{cases} \overset{0\notin D}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} y=0 \\ \log x=0 \end{cases} \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases}$

Int. asse y $\begin{cases} x=0 \\ y=x^3\log x \end{cases} \nexists$ perché $0\notin D$

$\lim_{x\to 0^+} x^3 \log x$ F.I. $0\cdot\infty$;

$\lim_{x\to 0^+} \underbrace{x^3}_{\to 0}\underbrace{\log x}_{\to -\infty} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\log x}{\frac{1}{x^3}}$; verificate le altre Hp del T. dell'H.

calcoliamo $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-3x^{-4}} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x^3 \log x = 0$

$\lim_{x\to+\infty} x^3 \log x = +\infty$; non c'è A. obl. infatti $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^3\log x}{x} = +\infty$

$f'(x) = 3x^2 \log x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = x^2(1+3\log x)$ $(\exists\, \forall x\in D)$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow (1+3\log x)>0 \Leftrightarrow \log x>-1/3 \Leftrightarrow x>e^{-1/3}$ la f. è crescente

La funzione ha in $x = e^{-1/3}$ un punto di minimo; $f(e^{-1/3}) = e^{-1/3}\left(-\frac{1}{3}\right)$ la sua ordinata

$f''(x) = 2x(1+3\log x) + x^2 \cdot \frac{3}{x} = x(5+6\log x)$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow 5+6\log x > 0$ (essendo in D: $x>0$) $\Leftrightarrow x>e^{-5/6}$ la f. è convessa

In $e^{-5/6}$ si ha un flesso: $f(e^{-5/6}) = e^{-5/6}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right) \Rightarrow F\left(e^{-\frac{5}{6}}, -\frac{5}{6}e^{-\frac{5}{6}}\right)$

La tg al flesso ha coeff. angolare:

$f'(e^{-5/6}) = e^{-5/3}\left(1+3\left(-\frac{5}{6}\right)\right) = e^{-5/3}\left(-\frac{3}{2}\right)$