3) $\lim_{x \to 1^+} \left[e^{\frac{3x-7 \to -4}{x^2-x \to 0^+} \to -\infty} \to 0 \right] = 0$

$x^2 - x > 0$ per $x < 0 \vee x > 1$

4) Per calcolare il valore approssimato di $4 \log\frac{6}{5}$, calcoliamo $\log\frac{6}{5}$ utilizzando lo sviluppo di Mac-Laurin di $\log(1+x)$ con $1+x = \frac{6}{5} \Rightarrow x = \frac{1}{5}$

Poichè se $f(x) = \log(1+x)$; $f(0) = 0$; $f'(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f''(0) = -1$; $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \Rightarrow \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + R_3$

$\Rightarrow \log\frac{6}{5} \cong \frac{1}{5} - \frac{1}{50} = \frac{9}{50} \Rightarrow$

$|R_3| = \left(\frac{1}{6}\left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \frac{2}{(1+\bar{x})^3}\right) < \left(\frac{1}{\cancel{6}_3} \cdot \frac{1}{125} \cdot \cancel{2}\right) = \frac{1}{375} < 10^{-2}$

5) a) $\int \frac{1}{x \log x} dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{1}{t} dt = \log|t| + c = \log|\log x| + c$

sost. $\log x = t \Rightarrow \frac{1}{x} dx = dt$

b) Si tratta di un integrale improprio. Per verificare che $\exists$ applichiamo il criterio degli infinitesimi. Infatti: $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x + 1} = 0$ e inoltre

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{e^x+1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x + 1} = 0$ perchè $y = e^x$ è un infinito di ordine superiore ad $y = x$ quindi la nostra funzione è un infinitesimo di ordine superiore ad 1 rispetto all'infinitesimo di confronto $\frac{1}{x}$

Calcoliamo la primitiva:

$\int \frac{1}{e^x + 1} dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{1}{t(t+1)} dt \overset{*}{=} \int \frac{1}{t} dt - \int \frac{1}{t+1} dt = \log|t| - \log|t+1|$

sost. $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{t} dt$

$* \frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} \Rightarrow 1 = A(t+1) + Bt \Rightarrow \begin{cases} A+B = 0 \\ A = 1 \end{cases} \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$