

Materiale didattico

Matematica finanziaria

A cura di

Francesco CARBONE

Versione: 02gen2013

Materiale in bozza. E' gradita la segnalazione di eventuali errori/errori.

Viterbo

Anno Accademico 2012/13

Sommario

Introduzione	3
1. Regimi dell'interesse.....	4
Interesse semplice	5
Interesse composto discontinuo annuo	7
Interesse convertibile.....	11
Interesse composto continuo annuo.....	11
2. Annualità.....	12
Operazioni relative alle annualità costanti posticipate limitate	12
Operazioni relative alle annualità costanti anticipate limitate.	13
Operazioni relative alle annualità costanti posticipate illimitate	15
Operazioni relative alle annualità variabili limitate.....	16
Costruzione di un piano di ammortamento	16
3. Periodicità.....	20
Operazioni relative alle periodicità costanti posticipate limitate.....	20
Operazioni relative alle periodicità costanti posticipate illimitate.....	20
4. Risoluzione degli esercizi di matematica finanziaria	21
Schema metodologico.....	21
5. Uso del foglio elettronico nella matematica finanziaria	25
Impostazione.....	25
Sintassi delle formule	26
Risoluzione mediante l'uso del foglio elettronico	28
6. Quadro delle principali formule di matematica finanziaria	30

Introduzione

La matematica finanziaria (MF) è uno strumento di lavoro per la dottrina estimativa, per le valutazioni economico-finanziarie e per le scienze economiche. Avvalendosi della MF è possibile spostare nel tempo (anticipare/posticipare) dal momento i a quello j degli importi monetari (costi e/o ricavi), nonché aggregarli eseguendo la loro somma algebrica allorché si realizzano in epoche diverse.

Perché vi è bisogno della MF? Le motivazioni possono essere comprese analizzando il seguente quesito: è meglio 1.000 € oggi oppure 1.000 € tra un anno? La totalità degli individui razionali opterebbe per i 1.000 € oggi. Questa unanimità verrebbe andrebbe ad assottigliarsi allorché al termine dell'anno verrebbe assicurato un importo via via crescente, pari a $[1.000 + \Delta]$, dove Δ è la remunerazione che ciascuno individuo si attenderebbe per aver atteso il tempo necessario affinché maturasse $[C_n]$ ¹. La relazione che lega il capitale iniziale con il capitale finale è la seguente

$$C_n = C_0 + \Delta;$$

dove

$$\Delta = C_0 * r * t$$

ossia Δ esprime l'incremento monetario che registra un capitale in funzione della ragione finanziaria (saggio di interesse) $[r]$ con cui varia il capitale nel tempo $[t]$, cioè Δ è l'interesse maturato dal capitale nell'unità di tempo, che normalmente viene così determinato

$$I = C_0 * r * t$$

Ne consegue

$$C_n = C_0 + (C_0 * r * t)$$

ed assumendo $t=1$ anno, si ha

$$C_n = C_0 * (1 + r)$$

Ritornando al quesito sopra esposto, ciascun individuo accetterà $[1.000 + \Delta]$ a importi diversi di Δ in relazione al suo saggio personale atteso di remunerazione del capitale. Data la somma attesa $[C_n]$ per rinunciare a $[C_0]$, la formula inversa consente di determinare il relativo saggio di interesse $[\bar{r}]$ che ciascun individuo implicitamente ha scelto per la remunerazione del tempo dell'attesa che maturi $[C_n]$, ossia

$$\bar{r} = \left[\frac{C_n}{C_0} \right] - 1$$

Il saggio di interesse $[r]$, normalmente espresso su base annua, è ragione con cui avviene la remunerazione unitaria del capitale rappresentata dall'interesse $[I]$ a favore del capitalista (titolare dei diritti di proprietà del capitale). L'interesse è il costo che ciascuno deve sostenere per aver avuto un capitale da terzi e conseguentemente potremo definire il saggio di interesse come il costo unitario d'uso del capitale.

Altresì l'interesse rappresenta il costo che ciascun sostiene per aver rinunciato all'uso alternativo dei capitali. Muovere del denaro nel tempo equivale a sottrarlo ad altri usi alternativi, pertanto deve riconoscersi la sua remunerazione sia se esso è stato fornito da un capitalista (caso evidente) sia se il denaro derivi da autofinanziamento.

¹ Esso potrebbe anche interpretarsi come è l'ammontare a cui ciascuno rinunciarebbe per avere immediatamente la completa disponibilità del capitale $[C_0 = C_n - \Delta]$.

Ultimo aggiornamento: 28 dicembre 2012

Gran parte degli individui che posseggono dei capitali, grandi o piccoli che siano, impiegandoli si attendono una remunerazione. Ipotizzando che essa sia esclusivamente in denaro², ovvero ragionando in una logica di investimento, nel momento in cui ciascun individuo impiega del denaro per realizzare una iniziativa (strategia A) da essa si attende una remunerazione almeno pari o superiore a quella che avrebbe conseguito con lo stesso capitale impiegato in qualsiasi altro modo (strategie alternative B ed altre alternative), per cui la migliore tra le strategie scartate è il costo della rinuncia della strategia A³. Esemplicando: nel momento in cui l'individuo ha un capitale depositato in un conto corrente, lo preleva per realizzare un'iniziativa si attende che quest'ultima gli fornisca un beneficio non inferiore a quello che avrebbe avuto lasciando il denaro nel conto corrente. Ne consegue che ciascuno tende ad impiegare il denaro (ma il ragionamento può estendersi a qualsiasi risorsa), in iniziative che nelle attese gli assicurino una remunerazione almeno superiore all'impiego corrente.

Da cui la MF è lo strumento che consente di includere nel processo di valutazione economico-finanziario il costo opportunità dell'impiego alternativo del capitale. Con riferimento ad un generico investimento, i ricavi dello stesso devono essere in entità tale da compensare l'insieme dei costi sostenuti dall'investitore, ivi comprese le mancate remunerazioni che l'investitore non ha percepito prelevando il capitale dal conto corrente in cui era depositato.

La MF assume che:

- i) qualsiasi operazione finanziaria sia effettuata, comunque esiste un soggetto che mette a disposizione il denaro (capitalista) ed un altro che lo impiega (utilizzatore);
- ii) qualsiasi impiego sia realizzato con i capitali si deve comunque riconoscere una remunerazione a favore del capitalista;

La determinazione degli interessi sul capitale impiegato è conseguentemente una operazione imprescindibile per poter includere nel processo di valutazione il costo d'uso del capitale. Ne consegue che la somma di due o più importi economico-finanziari che si realizzano in epoche diverse richiede necessariamente la determinazione dei relativi interessi maturati durante il periodo, ovvero *due importi che maturano in momenti diversi non possono sommarsi matematicamente, ma solo finanziariamente. Ciò può effettuarsi solamente se ci si avvale della MF.*

1. Regimi dell'interesse

In relazione alle modalità con cui l'interesse si aggrega al capitale (tab. 1) si distinguono i seguenti regimi:

Interesse semplice: regime finanziario in cui l'interesse maturato sul capitale si somma al capitale che lo ha generato al termine dell'anno. E' il regime con cui convenzionalmente si assume di operare per operazioni finanziarie non superiori all'anno. Si tratta di un *interesse* non fruttifero, poiché gli interessi generati nel periodo precedente rimangono inerti nei periodi successivi, ossia l'interesse maturato al termine dell'unità di tempo non concorre alla maturazione degli interessi per il periodo successivo;

² Normalmente la remunerazione a favore del consumatore è rappresentata dall'utilità che gli assicura l'acquisto di un bene utilizzando il denaro. Per utilità deve intendersi la capacità del bene a soddisfare un nostro bisogno.

³ Il valore della migliore alternativa scartata per seguire la strategia A, costituisce il costo opportunità di quest'ultima.

Ultimo aggiornamento: 28 dicembre 2012

Interesse composto: dato un capitale iniziale, gli interessi maturati nel corso del tempo si sommano al capitale iniziale per la determinazione degli interessi dei periodi successivi, ovvero gli interessi sono fruttiferi. L'interesse composto può essere distinto in:

discontinuo annuo: quando l'interesse maturato nel corso tempo, a fine anno si aggrega al capitale iniziale per la quantificazione degli interessi del periodo successivo;

convertibile: quando gli interessi maturati da un capitale si sommano al capitale iniziale più volte nel corso dell'unità di tempo in cui è espresso il saggio di interesse (esempio: saggio su base annua con aggregazione bimestrale, trimestrale, semestrale, etc.);

continuo o matematico: quando gli interessi si sommano al capitale in ogni istante. Esso ha una valenza più sul piano teorico che operativo.

Tab. 1 - Quadro sinottico dei regimi di interesse

Interesse	Interesse	Capitale di riferimento	Aggregazione degli interessi al capitale
Semplice	Non fruttifero	Capitale iniziale	
Composto discontinuo annuo	Fruttifero	Montante	Annuale
Convertibile	Fruttifero	Montante	Inferiore all'anno
Continuo	Fruttifero	Montante	Istante per istante

Interesse semplice

E' il regime convenzionalmente in uso quando i movimenti finanziari avvengono con orizzonti temporali convenzionalmente inferiori all'anno. Gli interessi si aggregano al capitale al termine del periodo e non sono fruttiferi.

Dato un il capitale disponibile al momento iniziale indicato come C_0 , un saggio di interesse annuo r ed il tempo t , l'interesse ammonta a:

$$I = C_0 * r * t$$

Formule inverse *interesse semplice*

Capitale iniziale	$C_0 = \frac{I}{r * t}$
Saggio di interesse	$r = \frac{I}{C_0 * t}$
Tempo	$t = \frac{I}{C_0 * r}$

Montante semplice

Il capitale finale generatosi al termine del periodo $[t]$ (con $t \leq 1$ anno) è denominato montante semplice ed ammonta a:

$$M = [C_0 + I] = [C_0 + (C_0 * r * t)] = [C_0 * (1 + r * t)]$$

Formule inverse *montante semplice*

Capitale iniziale	$C_0 = \frac{M}{1 + r * t}$
Saggio di interesse	$r = \left[\frac{M - C_0}{C_0 * t} \right] = \left[\frac{\frac{M}{C_0} - 1}{t} \right]$
Tempo	$t = \left[\frac{M - C_0}{C_0 * r} \right] = \left[\frac{\frac{M}{C_0} - 1}{r} \right]$

Sconto.

Si intende l'importo portato a riduzione del montante per determinare il capitale disponibile. Formalmente

$$C = M - Sc.$$

Si distinguono comunemente lo sconto matematico o razionale

$$Sc = [M - C] = \left[M - \frac{M}{1 + r * t} \right] = \left[\frac{M * (1 + r * t) - M}{(1 + r * t)} \right] = \left[\frac{M * r * t}{1 + r * t} \right].$$

dallo sconto bancario o commerciale

$$Sc = M * r * t$$

Quest'ultimo è quello applicato dalle banche. Formalmente è meno ortodosso di quello matematico, tuttavia, più semplice da calcolare e più vantaggioso.

Le operazioni in regime di interesse semplice

La posticipazione di capitali. Dato un capitale C_0 ed il saggio di interesse r il montante al momento t (M_t) è dato come

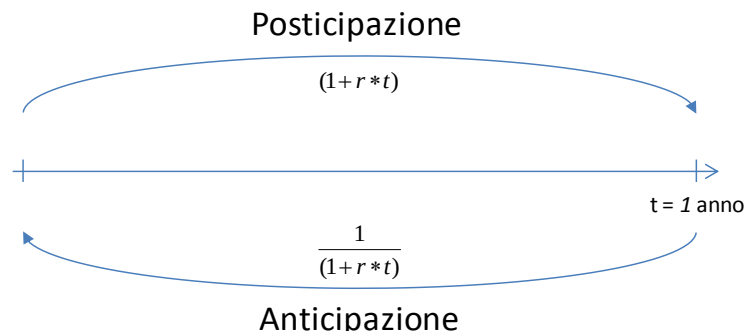
$$M_t = C_0 * \underbrace{(1 + r * t)}_{\substack{\text{fattore di} \\ \text{posticipazione} \\ \text{per l'interesse semplice}}},$$

La posticipazione implica spostare ad un momento successivo il C_0 accorpandogli i relativi interessi maturati nel corso del periodo ottenendo il montante (M_t). Il montante sarà sempre superiore al capitale iniziale ($M_t > C_0$).

L'anticipazione di capitali. Dato un capitale M_t ed il saggio di interesse r il capitale al momento 0 (C_0) è dato come

$$C_0 = M_t * \underbrace{\left[\frac{1}{(1 + r * t)} \right]}_{\substack{\text{fattore di} \\ \text{anticipazione per} \\ \text{l'interesse semplice}}}$$

L'anticipazione implica spostare ad un momento precedente il M depurandolo dai relativi interessi ottenendo il montante (C_0). Il capitale al momento 0 sarà sempre inferiore al montante ($C_0 < M_t$).



Il montante pluriennale. Pur operando in regime di interesse semplice è possibile determinare il montante al termine di un arco temporale pluriennale. Ricordando che si è in un regime di interesse non fruttifero, dato un C_0 ed un saggio di interesse r , il montante al momento dopo n anni è

$$M_0^1 = C_0 + I_0^1$$

$$M_1^2 = C_0 + I_1^2$$

$$M_2^3 = C_0 + I_2^3$$

$$M_{n-1}^n = C_0 + I_{n-1}^n$$

Ed aggregando si ha

$$M_0^n = C_0 + (I_0^1 + I_1^2 + I_2^3 + \dots + I_{n-1}^n)$$

Essendo

$$I_0^1 = I_1^2 = I_2^3 = \dots = I_{n-1}^n$$

Si ha che

$$M_0^n = [C_0 + n * I] = [C_0 + n * (C_0 * r * t)] = \{C_0 + [1 + (n * r * t)]\}$$

Interesse composto discontinuo annuo

Consente di far viaggiare **un importo monetario** in un periodo temporale (convenzionalmente) superiore all'anno, dove al termine di ciascun anno gli interessi si aggregano al capitale iniziale, costituendo il capitale finale o montante che genererà l'interesse dell'annualità successiva.

Interesse composto è quello maturato al termine dell'anno dato il capitale iniziale C_0 ed il saggio di interesse " r " al termine di un anno, l'interesse sarà:

$$I = C_0 * r$$

mentre il montante al termine del medesimo anno (M_n) ammonta a

$$M_n = (C_0 + I) = [C_0 + (C_0 * r)] = [C_0 * (1 + r)] = [C_0 * q]$$

da cui è possibile determinare le seguenti formule inverse

Saggio di interesse	$r = \frac{M_n}{C_0} - 1$
Capitale iniziale	$C_0 = \frac{M_n}{q}$

Rispetto ad un orizzonte temporale pluriennale pari ad “n”, dato un capitale iniziale C_0 ed un saggio di interesse costante per l'intero periodo, al montante al termine dello stesso periodo (M_n) si perviene

Periodo (n=anni)				
n=0	C_0	C_0	C_0	C_0
n=1	$M_1=C_0+I_1$	$M_1 = C_0 + C_0 * r$	$M_1 = C_0 * (1+r)_1$	$M_1 = C_0 * q$
n=2	$M_2=M_1+I_2$	$M_2 = M_1 + M_1 * r$	$M_2 = M_1 * (1+r)_2 = C_0 * (1+r)_1 * (1+r)_2$	$M_2 = C_0 * q^2$
n=3	$M_3=M_2+I_3$	$M_3 = M_2 + M_2 * r$	$M_3 = M_2 * (1+r)_3 = C_0 * (1+r)_1 * (1+r)_2 * (1+r)_3$	$M_3 = C_0 * q^3$
n=...	...	...	...	...
n= n	$M_n=M_{n-1}+I_{n-1}$	$M_n=M_{n-1}+M_{n-1}*r$	$M_n = M_{n-1} * (1+r)_n = C_0 * (1+r)_1 * (1+r)_2 * (1+r)_3 * ... * (1+r)_n$	$M_n = C_0 * q^n$

Ne consegue che un montante dopo “n” anni sarà pari a

$$M_n = C_0 * q^n$$

dove [n] è il numero delle volte che il capitale diviene fruttifero. Da cui è possibile sviluppare le seguenti formule inverse

Capitale iniziale	$C_0 = \frac{M_n}{q^n}$
Saggio di interesse	$r = \left[\sqrt[n]{\frac{M_n}{C_0}} \right] - 1$
Tempo	Data la relazione $q^n = \frac{M_n}{C_0},$ sviluppando si ha $[q^n = n * \log(q)] \text{ e mentre } \left[\frac{M_n}{C_0} = \log(M_n) - \log(C_0) \right],$ da cui $\left[n = \frac{\log(M_n) - \log(C_0)}{\log(q)} \right].$

Per la determinazione del tempo, ci si può avvalere anche di altri procedimenti, meno precisi ma comunque efficaci:

- tavole finanziarie** individuando in tempo corrispondenza del coefficiente “ q^n ” più prossimo a quello calcolato come rapporto tra capitale finale e capitale iniziale;
- metodo grafico** ponendo sull'ordinate “ q^n ” ed in ascissa “n”, riportando i valori progressivi al variare di n e tracciando la congiungente dei vari valori, avendo cura di comprendere valori i cui estremi sono rispettivamente superiori ed inferiori al valore determinato come rapporto tra capitale finale e capitale iniziale. L'età in corrispondenza nel punto di intersezione con l'asse delle ascisse è il tempo cercato.

Le operazioni mediante l'interesse composto

Posticipare implica calcolare il montante al termine del periodo “n” aggregando i relativi interessi delle varie annualità. Con questa operazione il C_0 si accresce degli interessi maturati nel corso del periodo che annualmente andranno ad aggregarsi al capitale stesso accrescendo il capitale su cui vanno a computarsi gli interessi del periodo successivo. Il montante o capitale finale sarà superiore al capitale iniziale ($M_n > C_0$). Formalmente si ha:

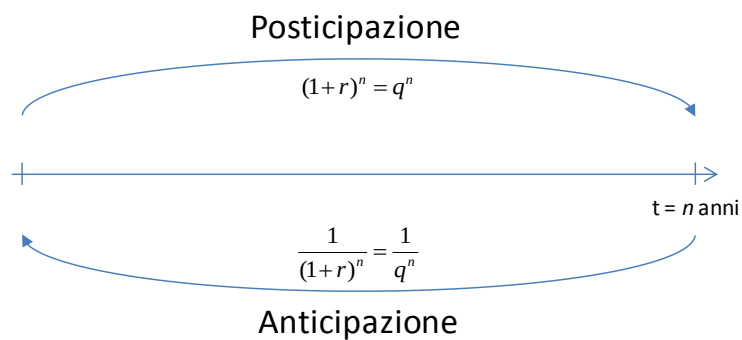
per la posticipazione di un anno: $M_1 = C_0 * q$

per la posticipazione di “n” anni: $M_n = C_0 * q^n$

Anticipare implica depurare il capitale finale della componente degli interessi maturati nel corso del periodo “n”, ovvero calcolare il capitale iniziale dato il montante, o capitale finale, riferito all’epoca “n”. Il capitale iniziale sarà inferiore al montante o capitale finale ($C_0 < M_n$). Formalmente si ha:

per l’anticipazione di un anno: $C_0 = M_1 * \frac{1}{q}$

per la posticipazione di “n” anni: $C_0 = M_n * \frac{1}{q^n}$.



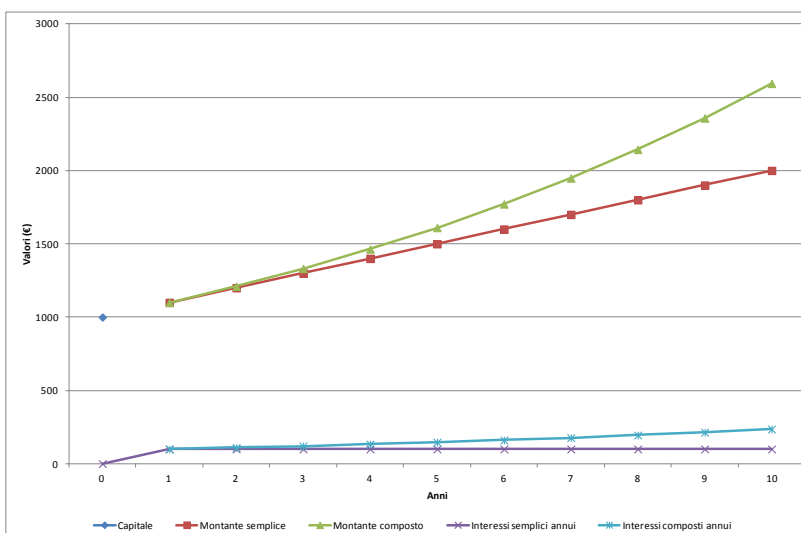
Confronto tra il regime dell'interesse semplice e quello composto

Come già stato esposto, il regime dell'interesse semplice fa riferimento ad interessi non fruttiferi, mentre quello composto attiene agli interessi fruttiferi. Con riferimento al montante al termine di un anno, non vi sono differenze, poiché

montante semplice, $t=1$, si ha: $M_1 = [C_0 * (1 + r * t)] = [C_0 * (1 + r)]$

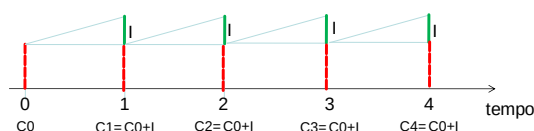
montante composto, $t=1$, si ha $M_1 = [C_0 * (1 + r)]$

Le diversità esistenti si evidenziano con su periodi pluriennali, es. determini il montante al 10° anno di un capitale di 1000 € al saggio del 10%. Mentre il montante semplice cresce linearmente con una ragione annua costante (100 €/anno), il montante composto ha un andamento crescente con il passare degli anni poiché annualmente aumenta il capitale rispetto al quale viene calcolato l'interesse dell'anno successivo.

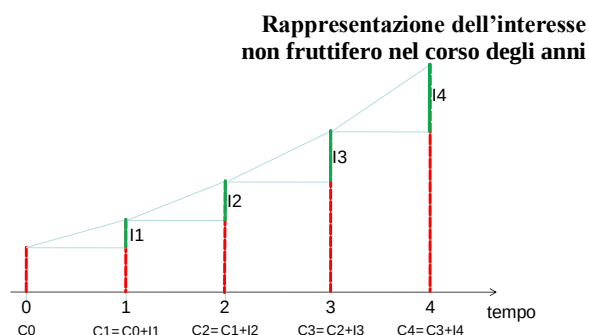


Comparazione dell'interesse semplice e composto dato C_0 1000 €, $r=10\%$ al termine dei 10 anni

Anni	Capitale iniziale	Interesse semplice			Interesse composto			Differenze
		Montante semplice	Interessi semplici annui	Interessi totali	Montante composto	Interessi composti annui	Interessi totali	
0	1000,00		0,00	0,00		0,00	0,00	
1		1100,00	100,00	100,00	1100,00	100,00	100,00	0,00
2		1200,00	100,00	200,00	1210,00	110,00	210,00	10,00
3		1300,00	100,00	300,00	1331,00	121,00	331,00	31,00
4		1400,00	100,00	400,00	1464,10	133,10	464,10	64,10
5		1500,00	100,00	500,00	1610,51	146,41	610,51	110,51
6		1600,00	100,00	600,00	1771,56	161,05	771,56	171,56
7		1700,00	100,00	700,00	1948,72	177,16	948,72	248,72
8		1800,00	100,00	800,00	2143,59	194,87	1143,59	343,59
9		1900,00	100,00	900,00	2357,95	214,36	1357,95	457,95
10		2000,00	100,00	1000,00	2593,74	235,79	1593,74	593,74



Rappresentazione dell'interesse non fruttifero nel corso degli anni



Rappresentazione dell'interesse non fruttifero nel corso degli anni

Interesse convertibile

Gli interessi maturati su un capitale si sommano al capitale medesimo “n” volte nel corso dell’unità di tempo “t” ovvero ogni $\bar{t}$ periodi, dove

$$\bar{t} = \frac{t}{n}.$$

Ne consegue che il saggio di interesse, avente base annua “r”, deve essere espresso come funzione del tempo $\bar{t}$.

Il saggio di interesse è di norma definito su base annua, ovvero esprime l’incremento di valore di 1 euro nel corso di un anno. Se gli interessi maturati si convertono in capitale per il periodo successivo fosse diverso dall’anno, anche il saggio di interesse dovrà essere espresso nella medesima unità di tempo. Ne consegue che se il tempo fosse espresso in unità inferiori (superiori), occorre dividere (moltiplicare) il saggio di interesse per il numero di unità di tempo contenute nel corso di un anno, ossia per il numero di volte che esso diviene fruttifero. In particolare se l’unità di tempo a conclusione del quale l’interesse si converte in capitale è espresso in:

- trimestri, ne consegue che il saggio di interesse annuo dovrà essere diviso per il numero di periodi in cui è suddiviso l’anno (nel caso: $r/4$);
- in giorni, settimane, mesi, ecc., il saggio di interesse annuo deve essere espresso rispettivamente su base giornaliera, (ovvero $r/360$ gg), settimanale (ovvero $r/52$), mensile (ovvero $r/12$), ecc.;
- in bienni, il saggio di interesse annuo dovrà essere raddoppiato, (ovvero $r*2$).

E’ possibile incontrare situazioni in cui il saggio di interesse sia definito per periodi diversi dall’anno (superiori o inferiori), in tal caso deve essere esplicitamente indicato.

Esempio:

Dato un capitale iniziale C_0 , il montante a fine anno al saggio r , considerando che gli interessi sono fruttiferi ogni t^* sarà:

$$n = \frac{t}{t^*}, r_c = \frac{r}{n}$$
$$M = C_0 \cdot (1+r)^t = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{t \cdot n}$$

Interesse composto continuo annuo

Regime finanziario in cui l’interesse maturato sul capitale si somma in ogni istante al capitale che lo ha generato.

Passando dal finito (vedi interesse convertibile) all’infinito si ha:

$$M_n = \lim_{t \rightarrow \infty} C_0 \left(1 + \frac{r}{t}\right)^{n \cdot t} = C_0 * e^{r \cdot t}$$

Dove “e” è il numero di Nepero ($e=2,71828$).

Nel caso in cui si intenda operare sul continuo, assumendo r quale funzione del tempo $[r(t)]$, a generalizzazione dell’espressione precedente è:

$$M(t) = C_0 * \exp \left\{ \int_0^t r(t) * dr \right\}$$

2. Annualità

Con il termine di annualità si identificano gli importi finanziari percepite con una cadenza annuale. Le annualità possono essere distinte in funzione:

della natura: variabili, ovvero vi è almeno un importo della serie è diverso dagli altri; oppure costanti: ovvero tutti gli importi della serie sono uguali;

della durata: a) limitate: gli importi costanti annui sono in numero definito, pari ad “n”; b) illimitate: gli importi costanti annui sono in numero indefinito;

del momento temporale in cui si registrano nel corso dell’anno: a) anticipate gli importi costanti annui cadono ad inizio anno; b) posticipate gli importi costanti annui cadono al termine dell’anno; c) mediamente anticipate gli importi costanti annui cadono a metà anno.

A meno che diversamente specificato, è convenzione assumere che le poste finanziarie, si collochino al termine del periodo (siano normalmente posticipate). Occorre ricordare che non vi è una convenzione su come debba essere espressa l’eventualità che cadono in altri momenti nel corso dell’anno. Ciò può essere indicato specificando che sono *anticipate*, oppure utilizzando locuzioni come *ricorrono all’inizio del periodo*, etc.

L’accumulazione. si intende l’aggregazione in un unico valore capitale in corrispondenza di un determinato momento temporale, di una serie di importi annuali aventi cadenza annua, che cadono in anni diversi rispetto ad un periodo temporale pluriennale. l’accumulazione può essere iniziale, finale oppure intermedia.

Operazioni relative alle annualità costanti posticipate limitate

Accumulazione finale: creare un capitale alla fine della serie di annualità continue costanti e posticipate, normalmente indicato come momento “n” oppure “t”

$$\begin{aligned} A_n &= (a * q^{n-1}) + (a * q^{n-2}) + (a * q^{n-3}) + \dots + (a * q^{n-(n-1)}) + (a * q^{n-n}) = \\ &= a * (q^{n-1} + q^{n-2} + q^{n-3} + \dots + q^{n-(n-1)} + q^{n-n}) \\ &= a * (q^{n-1} + q^{n-2} + q^{n-3} + \dots + q + 1) \end{aligned}$$

Quest’ultima costituisce una progressione geometrica, che può essere espressa come:

$$A_n = a * \frac{q^n - 1}{r}$$

dove [n] è il numero delle annualità che deve aggregarsi.

Accumulazione iniziale: creare un capitale all’inizio della serie di annualità continue costanti e posticipate, indicato come “0”.

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \left(a * q^{n-1} * \frac{1}{q^n} \right) + \left(a * q^{n-2} * \frac{1}{q^n} \right) + \left(a * q^{n-3} * \frac{1}{q^n} \right) + \dots + \left(a * q^{n-(n-1)} * \frac{1}{q^n} \right) \\
 &\quad + \left(a * q^{n-n} * \frac{1}{q^n} \right) = \\
 &= a * \frac{1}{q^n} * (q^{n-1} + q^{n-2} + q^{n-3} + \dots + q^{n-(n-1)} + q^{n-n}) \\
 &= a * \frac{1}{q^n} * (q^{n-1} + q^{n-2} + q^{n-3} + \dots + q + 1)
 \end{aligned}$$

Quest'ultima costituisce una progressione geometrica, che può essere espressa come:

$$A_n = a * \frac{1}{q^n} * \frac{q^n - 1}{r} = a * \frac{q^n - 1}{r * q^n}$$

dove "n" è il numero delle annualità che si sommano.

Accumulazione intermedia: creare un capitale in un momento intermedio della serie di annualità continue, costanti e posticipate, indicato come "m". Ciò equivale a dire che per le annualità precedenti il momento "m" si effettuerà una accumulazione finale al momento "m", mentre per quelle seguenti si effettuerà una accumulazione iniziale al momento "m". Formalmente

$$A_m = A_0^m + A_m^n$$

che sviluppando diviene

$$A_0^m = a * \frac{q^m - 1}{r}$$

*Accumulazione
delle annualità precedenti
il momento "m"*

ed

$$A_m^n = a * \frac{q^{n-m} - 1}{r * q^{n-m}}$$

*Accumulazione
delle annualità seguenti
il momento "m"*

Operazioni relative alle annualità costanti anticipate limitate.

Le operazioni eseguibili con questo tipo di annualità sono esattamente le medesime delle annualità posticipate avvalendosi delle medesime formule, fatta eccezione per una operazione preliminare finalizzata a rendere posticipata l'annualità anticipata avvalendosi del coefficiente di posticipazione:

annualità anticipata a_a

annualità posticipata $a = (a_a * q)$

Accumulazione finale $A_n = (a_a * q) * \frac{q^n - 1}{r}$

Accumulazione iniziale $A_0 = (a_a * q) * \frac{q^n - 1}{r * q^n}$

Ultimo aggiornamento: 28 dicembre 2012

Formule inverse

Determinazione dell'annualità data l'accumulazione finale

$$a = A_n * \frac{r}{q^n - 1}$$

Nel caso dovesse sottendere l'annualità da accantonare costantemente per "n" per poter avere un capitale disponibile nel futuro pari ad A_n , questa è denominata quota di reintegra.

Determinazione dell'annualità data l'accumulazione iniziale

$$a = A_0 * \frac{r * q^n}{q^n - 1}$$

Nel caso dovesse sottendere l'annualità da versare costantemente per "n" per poter estinguere un debito contratto pari ad A_0 , questa è denominata quota di ammortamento.

Costruzione di un piano di ammortamento

	A	B	C	D	E	F	
1	T. deve comprare un'abitazione del valore di € 150.000. A tal fine sottoscrive un mutuo quinquennale con rate semestrali costanti posticipate al saggio di interesse del 5%.						
2	Capitale	€	150.000,00				
3	Saggio di interesse annuo	%		5,00%			
4	Saggio di interesse semestrale	%		2,50%			
5	Rate	n°		10			
6			Piano di ammortamento				
7			Numero rate	Rateo costante	Quote capitale	Quota interessi	Debito estinto
8			0				Debito residuo
9			1	17.138,81	13.388,81	3.750,00	13.388,81
10			2	17.138,81	13.723,53	3.415,28	27.112,35
11			3	17.138,81	14.066,62	3.072,19	41.178,97
12			4	17.138,81	14.418,29	2.720,53	55.597,26
13			5	17.138,81	14.778,75	2.360,07	70.376,01
14			6	17.138,81	15.148,21	1.990,60	85.524,22
15			7	17.138,81	15.526,92	1.611,89	101.051,14
16			8	17.138,81	15.915,09	1.223,72	116.966,24
17			9	17.138,81	16.312,97	825,84	133.279,21
18			10	17.138,81	16.720,79	418,02	150.000,00
19							-0,00
20			Piano di ammortamento (formule di calcolo)				
21			Numero rate	Rateo costante	Quote capitale	Quota interessi	Debito estinto
22			0				Debito residuo
23			=+B9+1	=C3*C5*((1+C5)^C6)/(((1+C5)^C6)-1)	=C10-E10	=G9*\$C\$5	=D10
24			=+B10+1	=C10	=C11-E11	=G10*\$C\$5	=F10+D11

Operazioni relative alle annualità costanti posticipate illimitate

Accumulazione iniziale

$$A_0 = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} a * \frac{q^n - 1}{r} * \frac{1}{q^n} \right] = \left[\frac{a}{r} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n - 1}{q^n} \right]$$

Poiché

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n - 1}{q^n} = 0$$

si ha

$$A_0 = \frac{a}{r}$$

Operazioni relative alle annualità variabili limitate

Accumulazione finale

$$A_n = [(a_1 * q^{n-1}) + (a_2 * q^{n-2}) + \dots + (a_i * q^{n-i}) + (a_n * q^{n-n})] = \left[\sum_{i=0}^n a_i * q^{n-i} \right]$$

Accumulazione iniziale

$$A_0 = \left[\left(a_1 * \frac{1}{q^{n-1}} \right) + \left(a_2 * \frac{1}{q^{n-2}} \right) + \dots + \left(a_i * \frac{1}{q^{n-i}} \right) + \left(a_n * \frac{1}{q^{n-n}} \right) \right] = \left[\sum_{i=0}^n a_i * \frac{1}{q^{n-i}} \right]$$

Dove

$$a_1 \neq a_2 \neq a_i \neq a_n$$

Costruzione di un piano di ammortamento

Il piano di ammortamento è uno strumento finanziario di uso comune a cui il consumatore fa ricorso per l'acquisto di un bene dal prezzo importante non avendo l'intera somma a disposizione e dovendo ricorrere ad un finanziamento da parte del mercato finanziario. Attraverso questo piano egli si impegna a saldare il debito nel corso di un periodo di tempo pluriennale, mediante il versamento di una rata con cadenza stabilita, comprensiva di una quota capitale, concernente il pagamento del bene in senso stretto e della quota interessi, relativa alla remunerazione riconosciuta a colui che ha reso disponibili i capitali per l'acquisto. Il piano di ammortamento è parte integrale del mutuo ipotecario richiesto da un individuo presso una banca o altra istituzione, per l'acquisto dell'abitazione

Gli elementi fondamentali per la costruzione di un piano di ammortamento sono:

- debito [D]: capitale richiesto dal soggetto debitore, che si configura come un capitale anticipato di cui deve procedere all'estinzione;
- durata [n]: periodo temporale espresso in anni nel corso del quale il debitore si impegna a saldare il debito;
- saggio di interesse [r]: costo annuo del debito contratto dal soggetto debitore;
- periodicità di pagamento [p]: cadenza con cui il debitore si impegna a pagare la rata, che può essere su base annua, oppure con cadenza superiore all'anno (raramente) oppure inferiore all'anno esempio mensile, bimestrale, trimestrale, etc..

Ultimo aggiornamento: 28 dicembre 2012

In funzione di quella che sarà la periodicità di pagamento occorre armonizzare alcuni dei parametri finanziari. Se la restituzione del debito avviene mediante n° 1 rata/anno i parametri esposti sono già “naturalmente” armonizzati, viceversa, se le rate sono in numero superiore ad 1 rata/anno, esempio hanno una cadenza quadrimestrale [$\rho=4$ mesi] si deve:

- quantificare le rate annualmente a pagamento, ossia $[\bar{n} = \frac{12}{\rho}]$ dove 12 sono i mesi dell'anno;
- convertire il saggio di interesse da annuo $[r]$ in periodico $[\bar{r}]$ attraverso la seguente relazione $[\bar{r} = r * \frac{\rho}{12}]$, dove 12 sono i mesi dell'anno. Il relativo fattore di posticipazione sarà $[\bar{q} = (1 + \bar{r})]$;
- esprimere la durata del mutuo $[t]$ come numero di periodi in cui cadono a scadenza le rate $[\bar{t}]$ quantificato con la seguente relazione $[\bar{t} = n * \frac{12}{\rho}]$

Es.: assunta una periodicità trimestrale per cui [$\rho=3$ mesi], un saggio di interesse annuo del 6%, ed una durata del mutuo di 3 anni, si avrà:

- $[\bar{n} = \frac{12}{\rho} = 4 \text{ rate*anno}]$
- $[\bar{r} = 6\% * \frac{\rho}{12} = 1,5\%];$
- $[\bar{t} = 3 * \frac{12}{\rho} = 12 \text{ rate}].$

Dati gli elementi fondamentali sopra indicati, sussistono diverse modalità con cui può determinarsi il rateo, l'importo della rata periodicamente saldata dal debitore, che può avvenire al termine del periodo (posticipata) oppure in avvio dello stesso (anticipata) allorché specificatamente indicato.

Con riferimento ad un debito di € 20.000 da liquidarsi in 3 anni ad un saggio di interesse annuo del 6% con rate semestrali, si procederà ad illustrare i diversi schemi di calcolo del piano di ammortamento.

Piano di ammortamento con rata fissa. Esso è denominato comunemente come piano alla “Francese” e si caratterizza per avere un rateo periodico costante per l'intero durata.

Numero rata	Rateo $\bar{a}$ $[\bar{a} = D * \frac{\bar{r} * \bar{q}^{\bar{n}}}{\bar{q}^{\bar{n}} - 1}]$	Quota capitale Q.Cap $[\bar{a} - Q.Int]$	Quota Interessi Q.Int $[D_{i-1} * \bar{r}]$	Debito estinto D.Est $[\sum_1^i Q.Cap]$	Debito residuo D $[D_0 - D.Est_i]$
0					20.000,00
1	3.691,95	600,00	3.091,95	3.091,95	16.908,05
2	3.691,95	507,24	3.184,71	6.276,66	13.723,34
3	3.691,95	411,70	3.280,25	9.556,91	10.443,09
4	3.691,95	313,29	3.378,66	12.935,57	7.064,43
5	3.691,95	211,93	3.480,02	16.415,58	3.584,42
6	3.691,95	107,53	3.584,42	20.000,00	-

Ultimo aggiornamento: 28 dicembre 2012

Piano di ammortamento con la quota capitale costante, noto anche come metodo “Italiano”. Si caratterizza per avere una quota capitale costante e conseguentemente un rateo variabile per effetto della variazione degli interessi.

Numero rata	Rateo	Quota Interessi	Quota capitale	Debito estinto	Debito residuo
		Q.Int	Q.Cap	D.Est	D
	$[Q.Int+Q.Cap]$	$[D_{i-1} \cdot \bar{r}]$	$\left[\frac{D_0}{\bar{n}}\right]$	$\left[\sum_1^i Q.Cap\right]$	$[D_0 - D.Est_i]$
0					20.000,00
1	3.933,33	600,00	3.333,33	3.333,33	16.666,67
2	3.833,33	500,00	3.333,33	6.666,67	13.333,33
3	3.733,33	400,00	3.333,33	10.000,00	10.000,00
4	3.633,33	300,00	3.333,33	13.333,33	6.666,67
5	3.533,33	200,00	3.333,33	16.666,67	3.333,33
6	3.433,33	100,00	3.333,33	20.000,00	-

Una variante del piano di ammortamento con il metodo “Italiano” è quello con quota capitale costante per unità di misura (es, per unità di superficie), ma variabile in valore assoluto (con la superficie annua). Si distingue dal precedente per prevedere una quota capitale variabile, pertanto il rateo risulta anch'esso variabile date le variazioni annue della quota interessi e capitali. E' il caso di un debito contratto da una azienda forestale per la redazione del piano di assestamento, la cui estinzione è una funzione della superficie della particella forestale annualmente oggetto di utilizzazione.

Numero rata	Q. Capitale unitaria	Parametro di variazione	Quota Capitale Q.Cap	Quota Interessi Q.Int	Rateo	Debito Estinto D.Est	Debito Residuo D
	$\frac{D_0}{Sup_{tot}}$	Sup_i	$\left[\frac{D_0}{Sup_{tot}} \cdot Sup_i\right]$	$[Q.Int+Q.Cap]$	$[Q.Int+Q.Cap]$	$\left[\sum_1^i Q.Cap\right]$	$[D_0 - D.Est_i]$
	€/ha	ha					
0							20.000,00
1	33,11	90	2.980,13	4.180,13	4.180,13	2.980,13	17.019,87
2	33,11	140	4.635,76	5.656,95	5.656,95	7.615,89	12.384,11
3	33,11	66	2.185,43	2.928,48	2.928,48	9.801,32	10.198,68
4	33,11	98	3.245,03	3.856,95	3.856,95	13.046,36	6.953,64
5	33,11	123	4.072,85	4.490,07	4.490,07	17.119,21	2.880,79
6	33,11	87	2.880,79	3.053,64	3.053,64	20.000,00	-
Superficie totale (ha)		604					

Ultimo aggiornamento: 28 dicembre 2012

Piano di ammortamento con rata costante e pagamento degli interessi anticipato, noto anche come metodo “Tedesco”. Presenta delle analogie con quello a rata costante, ma anche significative differenze prevedendo che al momento della sottoscrizione del mutuo si provveda alla liquidazione degli interessi per primo periodo sull’intero capitale. L’ammontare delle rate di estinzione del debito è calcolato con riferimento al debito residuo degli interessi e la rata è anticipata.

Rate	Rateo	Quota interessi anticipati	Quota capitale	Debito estinto	Debito residuo al netto interessi annui anticipati	Debito residuo al lordo degli interessi annui anticipati
	$\bar{a}$	$Q.Int_{(ant)}$	$Q.Cap$	$D.Est$	$D.Res_{(ant)}$	$D.Res$
	$\left[D.Res_{(ant)_0} \cdot \frac{\bar{r} \cdot \bar{q}^{\bar{n}}}{\bar{q}^{\bar{n}} - 1} \cdot \frac{1}{\bar{q}} \right]$	$\left[D.Res_{(ant)_0} \cdot \bar{r} \right]$	$[D.Res_0 - Q.Int_{ant}]$	$\sum Q.int_{(ant)_i}$	$[D.Res_i - \bar{a}]$	
0	1.456,31	1.456,31	-		48.543,69	50.000,00
1	8.961,04	1.231,17	7.729,88	7.729,88	41.038,96	42.270,12
2	8.961,04	999,27	7.961,77	15.691,65	33.309,08	34.308,35
3	8.961,04	760,42	8.200,62	23.892,27	25.347,31	26.107,73
4	8.961,04	514,40	8.446,64	32.338,91	17.146,69	17.661,09
5	8.961,04	261,00	8.700,04	41.038,96	8.700,04	8.961,04
6	8.961,04	-0,00	8.961,04	50.000,00	-0,00	-0,00

Piano di ammortamento con due tassi, denominato anche “Americano”. Differisce sostanzialmente dagli altri schemi. Esso si articola in due piani

Piano di finanziamento che definisce l’ammontare annuo degli interessi sul debito sottoscritto ad saggio indicato come $\bar{r}_I$. Tale ammontare sarà interamente restituito al termine del periodo di finanziamento;

Piano di pre-accumulato. Il debito è chiamato a creare un fondo nel corso degli anni di durata del mutuo, tale che al termine dello stesso tra capitale versato e relativi interessi maturati ad un saggio pari a $\bar{r}_{II}$ si ha a disposizione il capitale per estinguere il debito.

Concretamente il contraente del mutuo versa rateo annuo pari alla somma degli interessi del piano con il capitale versato annualmente al fondo di pre-accumulo.

Piano finanziamento			Piano di pre-accumulo				
saggio di interesse		6,00%	saggio di interesse	5%			
N° rata	Debito D	Quota interessi Q.Int	Capitale versato C.Ver	Fondo Pre-accumulo F.PAcc	Interessi Int	Totale accumulato	Rateo
	D	$[D \cdot \bar{r}]$	$\frac{D \cdot \bar{r}}{\bar{q}^{\bar{n}} - 1}$	$\sum C.Ver_i$	$[F.PAcc \cdot \bar{r}]$	$[\sum C.Ver_i + \sum Int_i]$	$[Q.Int + C.Ver]$
0	20.000,00						
1		600,00	3.131,00			3.131,00	3.731,00
2		600,00	3.131,00	3.131,00	78,27	6.340,27	3.731,00
3		600,00	3.131,00	6.340,27	158,51	9.629,78	3.731,00
4		600,00	3.131,00	9.629,78	240,74	13.001,52	3.731,00
5		600,00	3.131,00	13.001,52	325,04	16.457,56	3.731,00
6		600,00	3.131,00	16.457,56	411,44	20.000,00	3.731,00

3. Periodicità

Operazioni relative alle periodicità costanti posticipate limitate

Accumulazione finale

$$A_{nt} = P * \frac{q^{n*t} - 1}{q^n - 1}$$

dove “n” è il turno e “t” il numero dei turni fino al momento “tn”

Accumulazione iniziale

$$A_0 = \left[A_{nt} * \frac{1}{q^{n*t}} \right] = \left[P * \frac{q^{n*t} - 1}{q^n - 1} * \frac{1}{q^{n*t}} \right]$$

dove “n” è il turno e “t” il numero dei turni fino al momento “tn”

Operazioni relative alle periodicità costanti posticipate illimitate

Accumulazione iniziale

$$A_0 = P \frac{1}{q^n - 1}$$

Dove “n” è l'intervallo di tempo con cui ricorrono le periodicità. Nel settore forestale è il turno o periodo di curazione

Accumulazione iniziale

$$A_0 = \left[(P_a * q^n) * \frac{1}{q^n - 1} \right]$$

Quadro sinottico delle formule di calcolo finanziario (in sfondo grigio le formule da memorizzare, in sfondo chiaro le formule di ricavare)

	Valore	Formule da memorizzare	Formule da ricavare	
Trasferimento di valori nel tempo	[a]	Fattore di riporto o posticipazione	Fattore di sconto o anticipazione	
		[q]	$\left[\frac{1}{q} \right]$	

Ultimo aggiornamento: 28 dicembre 2012

		$[q^n]$	$\left[\frac{1}{q^n} \right]$	
Annualità costanti posticipate	Valore Annualità	Fattore di accumulazione finale di annualità limitate	Fattore di accumulazione iniziale di annualità limitate	Fattore di accumulazione iniziale annualità illimitate (capitalizzazione di annualità)
	$[a]$	$\left[\frac{q^n - 1}{r} \right]$	$\left[\frac{q^n - 1}{1} \right] \cdot \left[\frac{1}{q^n} \right]$	$\left[\frac{1}{r} \right]$
Poliannualità costanti	Valore poliannualità;	Fattore di accumulazione finale di poliannualità limitate ⁽¹⁾	Fattore di accumulazione iniziale di poliannualità limitate ⁽¹⁾	Fattore di accumulazione iniziale poliannualità illimitate (capitalizzazione di poliannualità)
	$[p]$	$\left[\frac{q^{t \cdot n} - 1}{q^n - 1} \right]$	$\left[\frac{q^{t \cdot n} - 1}{q^n - 1} \right] \cdot \left[\frac{1}{q^{t \cdot n}} \right]$	$\left[\frac{1}{q^n - 1} \right]$

⁽¹⁾Legenda: $[t]$ anni intercorrenti tra due successive poliannualità; $[n]$ numero dei turni.

4. Risoluzione degli esercizi di matematica finanziaria

Schema metodologico

I problemi di MF variano significativamente per quel che concerne i loro termini generali, mentre la loro soluzione passa attraverso degli schemi comuni avvalendosi della ristretta cerchia di formule di matematica finanziaria. Altresì, confrontando i testi di matematica finanziaria ed estimo, questi riportano esercizi analoghi. Ciò è dovuto all'esigenza di soffermarsi soprattutto sulla metodologia e non al caso specifico.

Lo schema logico per la soluzione dei problemi di MF e mutatis mutandi per quelli estimativi, si articola nelle seguenti fasi:

- analisi del testo ed individuazione del quesito a cui si deve risposta, ossia: cosa dobbiamo determinare?;
- individuare il procedimento più opportuno per poter dare risposta al quesito. Si tratta di individuare lo schema logico-matematico di riferimento che consente di giungere all'obiettivo richiesto con la formulazione del quesito;
- esame delle informazioni disponibili ed individuazione degli ulteriori dati mancanti. Dato lo schema logico-matematico da applicare, occorre verificare se i dati disponibili sia sufficienti per le elaborazioni necessarie, ovvero quali sono i dati mancanti e dove è possibile acquisirli;

Ultimo aggiornamento: 28 dicembre 2012

d) rappresentazione grafica del problema rispetto all'asse del tempo e schematizzazione del procedimento che si andrà a sviluppare;

e) applicazione del procedimento risolutivo. Le elaborazioni che si andranno ad eseguire possono essere:

* preliminari, finalizzati a determinare dei dati strumentali per l'applicazione del procedimento (obiettivi preliminari);

* risolutive, ovvero sia forniscono il risultato al quesito avanzato;

* di perfezionamento per esprimere il risultato nella formulazione più opportuna per rispondere al meglio al quesito;

f) evidenziare il risultato finale, enucleare dal problema il risultato del quesito.

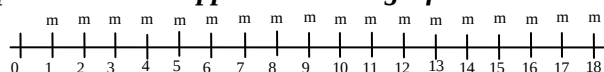
Si consideri che la risposta al quesito principale può effettuarsi seguendo diversi procedimenti. Inoltre è frequente che svolgendo lo stesso esercizio, seppur sia stato adottato il medesimo procedimento, si possono conseguire risultati leggermente diversi. Ciò non è un errore ma è dovuto al diverso livello di approssimazione che spesso accompagna gli strumenti di calcolo.

Esempio n° 1

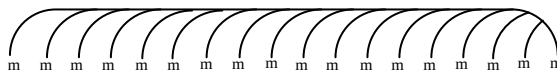
T. decide di versare mensilmente il 15% del proprio stipendio che ammonta ad € 1800 ad una assicurazione con. Vuole conoscere il capitale disponibile dopo 18 mesi di versamenti. Saggio di interesse 3,5%.

1. quesito principale: determinazione del montante semplice al 18° mese

2. estrapolazione dei dati primari e loro rappresentazione grafica:



3. Rappresentazione grafica del procedimento di calcolo:



4. definire il procedimento di calcolo: accumulazione finale di mensilità costanti posticipate al termine del 18° mese. Preliminarmente occorre a) definire la mensilità accantonata, b) esprimere il saggio di interesse su base mensile;

5. analisi dei dati disponibili ed integrazione di quelli mancanti: tutte le informazioni utili sono contenute nel testo;

7. Elaborazioni:

a) Quota mensile accantonata

$$Q_{m.le} = (St \cdot 15\%) = (1800 \cdot 15\%) = \text{€/mese } 270$$

b) numero quote versate

$$N \cdot Q_{m.li} = (\text{anni} \cdot 12) = (1,5 \cdot 12) = 18 \text{ mensilità}$$

c) saggio di interesse mensile

$$r_{m.le} = \left(\frac{r}{12} \right) = 0,29\%$$

Accumulazione di mensilità costanti posticipate limitate

$$\left[Q_{m.le} \cdot \frac{q^n - 1}{r} \right] = \left[270 \cdot \frac{(1,029)^{18} - 1}{0,29\%} \right] = \text{€ } 4.982,38$$

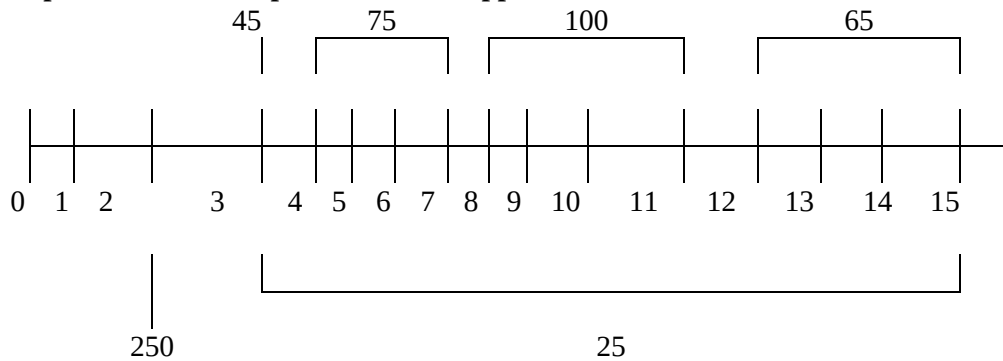
Esempio n° 2:

Ultimo aggiornamento: 28 dicembre 2012

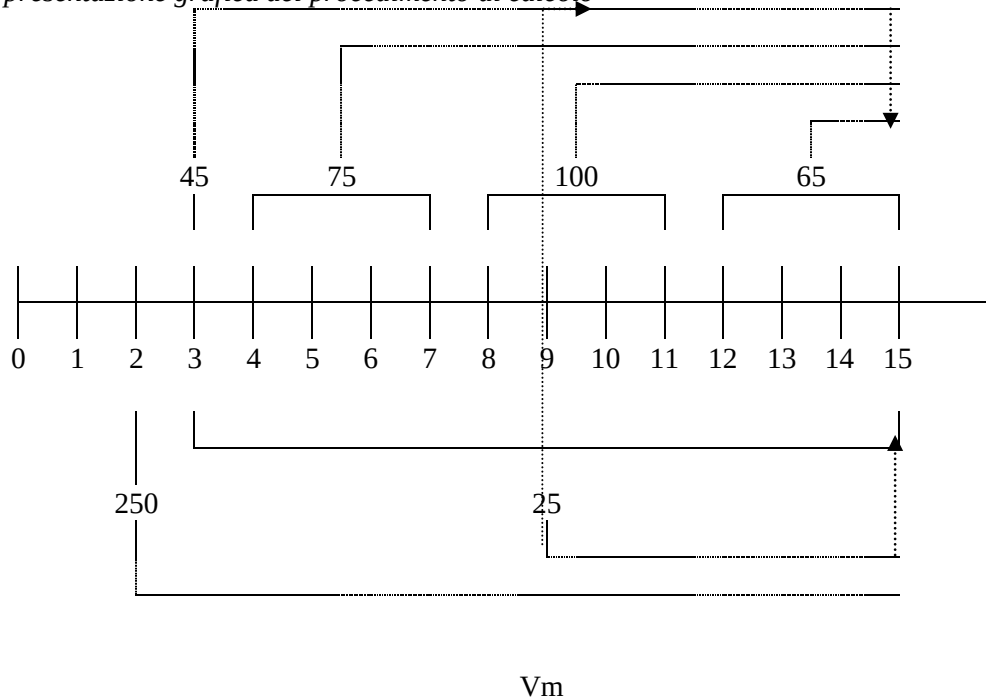
Un pioppeto della superficie di 12,45 ha è gestito con un ciclo colturale di 15 anni ed attualmente ha l'età di 9 anni. La spesa di impianto riferita all'anno 2° ammonta a 1500 euro/ha. Successivamente si sostengono spese annue per 150 euro/ha dal 3° al 5° anno e 60 €/ha dal 6° al 15° anno, mentre per l'espianto delle ceppaie si sostiene una spesa di 250 €/ha. Dal taglio intercalare eseguito al 10° anno si ottiene una produzione di 80 m³/ha e dal taglio di fine turno di 180 m³/ha, rispettivamente al prezzo di macchiatico di 85 €/m³ ed 140 €/m³. Supposto che il pioppeto sia rinnovato costantemente, si determini il valore della piantagione. Saggio di sconto 5%.

1) Quesito principale: stima del pioppeto al 9° anno;

2) Estrapolazione dei dati primari e loro rappresentazione:



3) Rappresentazione grafica del procedimento di calcolo



3. definire il procedimento di calcolo: capitalizzazione dei redditi periodici per i cicli successivi a quelli in corso a cui sommare il valore dei redditi futuri del ciclo in corso; **Obiettivi preliminari:** a) conoscere la periodicità dell'impianto; b) determinare i redditi futuri dell'impianto del periodo compreso tra il 9° ed il 15° anno;

6. analisi dei dati disponibili ed integrazione di quelli mancanti: **Tutti i dati utili e necessari per rispondere al quesito sono contenuti nel testo.**

Sommatoria dei ricavi(R) dall'anno 0 all'anno 15°

$$\sum_0^{15} R = [80 \cdot 85 \cdot (1 + 5\%)^6] + (180 \cdot 140) = 33.878,71 \text{ €/ha}$$

Sommatoria delle spese dall'anno 0 all'anno 15°

$$\sum_0^{15} S = [1500 \cdot (1 + 5\%)^{(15-2)}] + \left[150 \cdot \frac{(1 + 5\%)^{(5-3)} - 1}{5\%} \cdot (1 + 5\%)^{(15-5)} \right] + \left[60 \cdot \frac{(1 + 5\%)^{(15-6)} - 1}{5\%} \right] + 250 = 4.240,95 \text{ €/ha}$$

Reddito periodico del pescheto

$$Rp = \sum_0^{15} R - \sum_0^{15} S = 29.637,76 \text{ €/ha}$$

Valore del capitale fondiario del pescheto (V_0)

$$V_0 = \frac{\sum_0^n R - \sum_0^n S}{q^n - 1} = \left[\frac{33.878,71 - 4.240,95}{(1 + 5\%)^{15} - 1} \right] = 14.256,27 \text{ €/ha}$$

Sommatoria dei ricavi dal 9° anno al 15° anno

$$\sum_9^{15} R = \left[(80 \cdot 85) \cdot (1 + 5\%)^{(15-10)} \right] + (180 \cdot 140)$$

Sommatoria delle spese dall'anno 9 all'anno 15°

$$\sum_0^{15} S = \left(60 \cdot \frac{(1 + 5\%)^{(15-9)} - 1}{5\%} \right) + 250 = 658,11 \text{ €/ha}$$

Valore unitario del pioppeto al 9° anno (V_m), determinato con il criterio dei redditi futuri.

$$V_m = \frac{V_0 + \left(\sum_9^{15} R - \sum_9^{15} S \right)}{q^{n-m}} = \left[\frac{14.256,27 + (33.878,71 - 658,11)}{(1 + 5\%)^{(15-9)}} \right] = 35.427,97 \text{ €/ha}$$

Determinazione del valore dell'intero pioppeto

$$V_{m,12,45} = [V_m \cdot Sup] = [35.427,97 \cdot 12,45] = 441.078,24 \text{ €}$$

5. Uso del foglio elettronico nella matematica finanziaria

Impostazione

Per la soluzione degli esercizi con foglio elettronico i dati debbono essere introdotti in forma opportuna.

Di seguito è fornito uno schema di riferimento con cui impostare lo sviluppo dell'esercizio, che non ha carattere vincolante. Esso distingue una prima sezione relativa all'*introduzione dati elementari* a cui segue la seconda relativa all'*elaborazioni*.

a) Introduzione dati elementari

colonna **A**: descrizione sintetica del parametro;

colonna **B**: unità di misura;

colonna **C**: valore del parametro.

b) Elaborazioni

colonna **A**: descrizione sintetica dell'obiettivo del calcolo;

colonna **B**: unità di misura;

colonna **C**: introduzione della funzione di calcolo dalla cui risoluzione scaturisce il valore.

Nella sezione del foglio dedicata alle elaborazioni, dapprima vengono riportati gli obiettivi preliminari di calcolo, quindi l'obiettivo finale e le eventuali operazioni di perfezionamento.

Ultimo aggiornamento: 28 dicembre 2012

	A	B	C	D
1	Superficie impianto	ha	8,45	8,45
2	Costo impianto	€/lotto	32.000,00	32.000,00
3	Produzione intercalare	t/ha	40,00	40,00
4	Epoca della pro. Intercalare	anni	6,00	6,00
5	Produzione fine turno	t/ha	130,00	150,00
6	Epoca produzione fine turno	anni	13,00	13,00
7	Costi annui	€/lotto	2.500,00	2.100,00
8	Prezzo del legname	€/t	80,00	100,00
9	Saggio		0,00	0,04
10				
11	Determinazione poliannualità			
12	Costo d'impianto a fine turno	€/lotto	50.046,50	=C2*(1+C9)^C6
13	Acc. Fine turno costi annui	€/lotto	40.282,50	=C7*((1+C9)^C6-1)/C9
14	Prod. Intercare a fine turno	€/lotto	34.402,40	=(C3*C1*C8)*((1+C9)^(C6-C4))
15	Prod. Finale	€/lotto	87.880,00	=C5*C8*C1
16	Valore poliannualità	€/lotto	31.953,20	=C15-C14-(C12-C13)
17				
18	Determinazione valore di capitalizzazione			
19	Valore di capitalizzazione	€/lotto	56.659,10	=C16/(((1+C9)^C6)-1)
20	Valore di capitalizzazione unitario	€/ha	6.705,20	=C19/C1

Dati elementari (righe 1-9)

Obiettivo preliminare (righe 12-15)

Obiettivo finale (righe 16-19)

Elaborazioni di perfezionamento (righe 20-21)

La colonna D riporta le funzioni che hanno generato i risultati presenti nella colonna C.

Sintassi delle formule

Dovendosi risolvere gli esercizi di matematica finanziaria mediante l'uso di foglio elettronico occorre familiarizzare nell'introduzione delle formule. Queste, infatti, debbono essere scritte secondo la sintassi prevista dal foglio elettronico. Occorre, comunque, ricordare che molte di queste formule sono già contenute nell'archivio delle funzioni del foglio elettronico e possono essere utilmente impiegate, tuttavia, essendo già strutturate occorre comprendere come lavorano per adottare eventuali accorgimenti al loro uso rispetto alle proprie esigenze.

Scrittura delle formule dell'interesse semplice su foglio elettronico

	A	B	C	C esplosa
2	Capitale iniziale	€	100	
3	Saggio di sconto		2,00%	
4	Tempo	Mesi	3	
5				
6	Funzioni dell'interesse semplice			
7	Interesse semplice	€	0,50	=C2*C3*(C4/12)
8	Montante semplice	€	106,00	=C2*(1+(C3*C4))
9	Sconto semplice commerciale	€	0,53	=C8*C3*(C4/12)
10	Sconto semplice razionale	€	0,53	=(C8*C3*(C4/12))/(1+(C3*(C4/12)))

Ultimo aggiornamento: 28 dicembre 2012

Scrittura delle formule dell'interesse composto con annualità costanti su foglio elettronico

A	B	C	D	E
2 Saggio di sconto	R		3,50%	
3 Annualità posticipata	A	€	150,00	
4 Tempo	N	anni	12	
5				
6 Funzioni dell'interesse composto				
7 Fattore di posticipazione			1,0350	$= (1+C2)$
8 Fattore di anticipazione			0,9662	$= 1/(1+C2)$
9 Q.ta annua anticipata	a	€	144,93	$= C3/(1+C2)$
10 Q.ta annua posticipata	a	€	150,00	$= C9*(1+C2)$
11 Interesse composto (per 1 anno)	I	€	5,25	$= C3*((1+C2)-1)$
12 Interesse composto (per n anni)	I	€	390,29	$= C3*(((1+C2)^{C4}-1)/C2)-C4)$
13 Montante composto annuale	M	€	155,25	$= C3*(1+C2)$
14 Montante composto pluriennale di annualità limitate costanti e posticipate (*)	An	€	2.190,29	$= C3*(((1+C2)^{C4}-1)/C2)$
15 Sconto composto razionale	Scr	€	740,79	$= C14*((1+C2)^{C4}-1)/((1+C2)^{C4})$
16 Acc. finale di annualità limitate costanti e posticipate	An	€	2.190,29	$= C3*(((1+C2)^{C4}-1)/C2)$
17 Acc. iniziale di annualità limitate costanti e posticipate	A0	€	1.449,50	$= C3*(((1+C2)^{C4}-1)/(C2*((1+C2)^{C4})))$
18 Q.ta annua di reintegra	a	€	150,00	$= C16*(C2/(((1+C2)^{C4}-1)))$
19 Q.ta annua di ammortamento	a	€	150,00	$= C17*((C2*(1+C2)^{C4})/(((1+C2)^{C4}-1)))$
20 Q.ta annua di deprezzamento lineare	a	€	61,73	$= (C16-C17)/C4$
21 Acc. iniziale di annualità illimitate costanti e posticipate	A0	€	4.285,71	$= C3/C2$

(*) Equivale Acc. finale di annualità limitate costanti e posticipate

Scrittura delle formule dell'interesse composto con annualità variabili su foglio elettronico

A	B	C	C esplosa
2 Annualità 1	€	150	
3 Tempo	anni	1	
4 Annualità 2	€	220	
5 Tempo	anni	2	
6 Annualità 3	€	95	
7 Tempo	anni	3	
8 Annualità 7	€	95	
9 Tempo	anni	7	
10 Annualità 10	€	175	
11 Tempo	anni	10	
12 Saggio di interesse		4,50%	
13			
14 Funzioni dell'interesse composto			
15 Acc. Finale di annualità limitate, variabili, continue e posticipate	€	488,70	$= (C2*(1+\$C\$12)^{(\$C\$7-C3)})+(C4*(1+\$C\$12)^{(\$C\$7-C5)})+(C6*(1+\$C\$12)^{(\$C\$7-C7)})$
16 Acc. iniziale di annualità limitate, variabili, continue e posticipate	€	428,25	$= ((C2*(1+\$C\$12)^{(\$C\$7-C3)})+(C4*(1+\$C\$12)^{(\$C\$7-C5)})+(C6*(1+\$C\$12)^{(\$C\$7-C7)}))/((1+C12)^{C7})$
17 Acc. Finale di annualità limitate, variabili, continue e posticipate	€	868,47	$= (C2*(1+\$C\$12)^{(\$C\$11-C3)})+(C4*(1+\$C\$12)^{(\$C\$11-C5)})+(C6*(1+\$C\$12)^{(\$C\$11-C7)})+(C6*(1+\$C\$12)^{(\$C\$11-C9)})+(C6*(1+\$C\$12)^{(\$C\$11-C11)})$
18 Acc. iniziale di annualità limitate, variabili, continue e anticipate	€	834,64	$= (C2*(1+\$C\$12)^{(\$C\$11-C3)})+(C4*(1+\$C\$12)^{(\$C\$11-C5)})+(C6*(1+\$C\$12)^{(\$C\$11-C7)})+(C6*(1+\$C\$12)^{(\$C\$11-C9)})+(C6*(1+\$C\$12)^{(\$C\$11-C11)})/((1+\$C\$12)^{\$C\$11})$

Risoluzione mediante l'uso del foglio elettronico

Esempio n° 1

T. decide di versare mensilmente il 15% del proprio stipendio che ammonta ad € 1800 ad una assicurazione. Vuole conoscere il capitale disponibile alla fine del 3° anno di versamenti. Saggio di interesse 3,5%.

Sviluppo mediante foglio elettronico

	A	B	C	C esplosa
1	Stipendio	€/mese	1.800,00	
2	Percentuale stipendio accantonato		15%	
3	Periodo accantonamento	anni	3	
4	Saggio di interesse		3,50%	
5				
6	Obiettivi preliminari			
7	Quota mensile accantonata	€/mese	270,00	=C1*C2
8	Numero rate accantonate	n	36	=C3*12
9	Saggio di interesse mensile		0,29%	=C4/12
10				
11	Elaborazioni finali			
12	Capitale accantonato	€	10.232,93	=C7*(((1+C9)^C8)-1)/C9)

Esempio n° 2

Un pioppeto della superficie di 12,45 ha è gestito con un ciclo colturale di 15 anni ed attualmente ha l'età di 9 anni. La spesa di impianto riferita all'anno 2° ammonta a 1500 euro/ha. Successivamente si sostengono spese annue per 150 euro/ha dal 3° al 5° anno e 60 €/ha dal 6° al 15° anno, mentre per l'espianto delle ceppaie si sostiene una spesa di 250 €/ha. Dal taglio intercalare eseguito al 10° anno si ottiene una produzione di 80 m³/ha e dal taglio di fine turno di 180 m³/ha, rispettivamente al prezzo di macchiatico di 85 €/m³ ed 140 €/m³. Supposto che il pioppeto sia rinnovato costantemente, si determini il valore della piantagione. Saggio di sconto 5%.

Sviluppo mediante foglio elettronico

	A	B	C	C esplosa
1	Superficie pioppeto	ha	12,45	12,45
2	Ciclo colturale	anni	15	15
3	Età corrente	anni	9	9
4	Spesa impianto complessiva al 2° anno	€/ha	1500	1500
5	Epoca spesa impianto	anni	2	2
6	spese annue dal 3° al 5° anno	€/ha	150	150
7	Anno di avvio spese annue € 150	anni	3	3
8	Anno di termine spese annue € 150	anni	5	5
9	spese annue dal 6° al 15° anno	€/ha	60	60
10	Anno di avvio spese annue € 60	anni	6	6
11	Anno di termine spese annue € 60	anni	15	15
12	Spese espianto ceppaie a fine turno	€/ha	250	250
13	Età produzione intercalare	anni	10	10
14	Produzione intercalare	mc/ha	80	80
15	Produzione fine turno	mc/ha	180	180
16	Prezzo di macchiatico produzione 10° anno	€/mc	85	85
17	Prezzo di macchiatico produzione 15° anno	€/mc	140	140
18	Saggio di sconto		5%	5%
19				
20	Elaborazioni preliminari			
21	Accumulazione dei ricavi al 15° anno	€/ha	33.878,71	=(C16*C14)*((1+C18)^(C2-C13))+(C15*C17)
22	Accumulazione delle spese al 15° anno	€/ha	4.240,95	=(C4*((1+C18)^(C2-C5)))+(C6*(((1+C18)^(C8-C7))-1)/C18)

Ultimo aggiornamento: 28 dicembre 2012

				$1/C18)*((1+C18)^(C2-C8)))+(C9*(((1+C18)^(C11-C10))-1)/C18))+C12$
23	Reddito periodico pioppeto	€/ha	29.637,76	=C21-C22
24	Valore fondiario del pioppeto ad inizio ciclo colturale	€/ha	14.256,27	=C23/((1+C18)^C2)
25				
26	Accumulazione dei ricavi dal 9° al 15° anno	€/ha	33.878,71	=((C16*C14)*((1+C18)^(C2-C13)))+(C15*C17)
27	Accumulazione delle spese dal 9° al 15° anno	€/ha	658,11	=(C9*(((1+C18)^(C2-C3))-1)/C18))+C12
28				
29	Elaborazioni finali			
30	Valore del pioppeto al 9° anno	€/ha	35.427,97	=(C24+(C26-C27))/((1+C18)^(C2-C3))
31				
32	Elaborazioni di perfezionamento			
33	Valore dell'intera superficie a pioppeto	€	441.078,24	=C30*C1

6. Quadro delle principali formule di matematica finanziaria

Quadro delle principali formule di matematica finanziaria relative all'interesse semplice

Formula	Denominazione	Obiettivo
$I = C_0 \bullet r \bullet n$	Interesse semplice	Determinare il capitale generatosi (interesse) nel periodo indicato "n", al saggio d'interesse infruttifero definito.
$M = C_0(1 + m)$	Montante semplice	Determinare l'importo complessivo (capitale ed interesse) riferito alla fine del periodo indicato "n", al saggio di interesse non fruttifero.
$Sc = M_n \bullet r \bullet t$	Sconto semplice commerciale	Determina l'ammontare di denaro da detrarre quale mancato interesse per il periodo di sconto "t" del montante M_n .
$Sc = M_n \bullet \left(1 - \frac{1}{1 + r \bullet t}\right) = \left[\frac{M_n \bullet r \bullet t}{1 + r \bullet t}\right]$	Sconto semplice matematico o razionale	Determinare l'ammontare di denaro da detrarre quale mancato interesse per il periodo di sconto "t" dal montante M_n al saggio di interesse infruttifero.

Quadro delle principali formule relative alla trattazione delle annualità

$q = (1 + r)$		Fattore posticipazione di	Coefficiente per cui moltiplicare un importo per posticiparlo di 1 anno. Assume sempre valori superiori all'unità.
$\frac{1}{q} = \frac{1}{(1 + r)}$		Fattore anticipazione di	Coefficiente per cui moltiplicare un importo per anticiparlo di 1 anno. Assume sempre valori inferiori all'unità..
$M = C_0 \bullet (1 + r) = C_0 \bullet q$	su 1 anno	Montante composto	Dato un capitale iniziale, fornisce il capitale finale complessivamente disponibile (capitale iniziale + interessi) dopo un periodo limitato
$M = C_0 \bullet (1 + r)^n = C_0 \bullet q^n$	su n anni		
$I = C_0 \bullet (q - 1)$	su 1 anno	Interesse composto	Fornisce l'interesse composto che matura su un capitale al termine di un periodo definito di tempo
$I = C_0 \bullet (q^n - 1)$	su n anni		
$a_0 = a_p * \frac{1}{q}$		Annualità anticipata	Determinare la quota annua posticipata (a_p), data la quota anticipata (a_0) ed il saggio di interesse.
$a_p = a_0 \bullet q$		Annualità posticipata	Determinare la quota annua anticipata (a_0), data la quota anticipata (a_p)
$Sc = \frac{M(q^n - 1)}{q^n}$		Sconto composto	Fornisce la somma di denaro da dedurre al montante finale per ottenere il capitale iniziale che maturerà tra n anni.
$A_n = a \frac{q^n - 1}{r}$		Accumulazione finale di limitate annualità costanti, posticipate	Fornisce la somma di “n” annualità costanti posticipate. Si pone l'obiettivo di creare un capitale alla fine del periodo di “n” anni.

Ultimo aggiornamento: 28 dicembre 2012

$A_0 = a \frac{q^n - 1}{rq^n}$	Accumulazione iniziale di limitate annualità costanti, posticipate	Fornisce la somma riferita di “n” annualità all’inizio del primo anno della serie. Si pone l’obiettivo di estinguere un capitale alla fine del periodo di “n” anni.
$a = A_n \frac{r}{q^n - 1}$	Quota annuale posticipata di reintegrazione , ovvero di costituzione di un capitale in n anni.	Determinare l’annualità, costante posticipata che ha generato il capitale riferito al termine dell’ultimo anno della serie di anni indicati. Ovvero, dato un capitale finale, fornisce l’annualità costante, posticipata che ha generato l’importo durante il periodo considerato.
$a = A_0 \frac{rq^n}{q^n - 1}$	Quota annuale posticipata di ammortamento , ovvero di estinzione di un debito in n anni.	Determinare l’annualità costante posticipata che può erogare un capitale riferito all’inizio del primo anno della serie di anni considerati. Ovvero, dato un capitale iniziale fornisce l’annualità costante, posticipata capace di ricreare il capitale riferito all’inizio del primo anno della serie di anni.
$a = \frac{(A_n - A_0)}{n}$	Quota annuale posticipata di deprezzamento lineare di un capitale in n anni.	Determinare la quota annuale di deprezzamento di un capitale iniziale (A_0) nell’ipotesi che lo stesso abbia un valore di recupero dopo n anni (A_n).
$A_0 = \frac{a}{r}$	Accumulazione iniziale di infinite annualità costanti posticipate (capitalizzazione dei redditi annui)	Determina l’ammontare complessivo di infinite annualità posticipate, annue, costanti.
$A_n = a_0q^n + a_1q^{n-1} + \dots + a_{n-1}q + a_n$	Accumulazione finale di n annualità variabili	Fornisce la somma finanziaria di importi variabili al momento n.

Quadro delle principali formule relative alla trattazione delle poliannualità

$A_{tn} = P \frac{q^{tn} - 1}{q^n - 1}$	Accumulazione finale di periodicità limitate costanti posticipate	Avendo un numero limitato di poliannualità costanti procede alla loro somma finanziaria riferita al termine dell’ultimo anno di erogazione della poliannualità.
$A_0 = (P_a * q^n) * \frac{1}{q^n - 1}$	Accumulazione finale di periodicità limitate costanti anticipate	Determina l’ammontare complessivo di infinite poliannualità, anticipate e costanti
$A_0 = P \frac{1}{q^n - 1}$	Accumulazione iniziale (all’attualità) di infinite periodicità P, costanti , posticipate (capitalizzazione dei redditi periodici)	Determina l’ammontare complessivo di infinite poliannualità, posticipate e costanti